D 加群の理論とその広がり

池 祐一

この手書きノートは 2021 年 4 月 3 日に NPO 法人数学カフェ（https://mathcafe.net/，当時は任意団体）で，「D 加群の理論とその広がり」という題で講演したときの資料です．この講演に際して参加者に限定的に配布したものですが，このたび数学カフェさんのご厚意により公開許可をいただきましたので，ここに公開いたします．内容についての責任はすべて池にあります．おそらく間違いがたくさん含まれており，ごまかしている部分もかなりあるので注意してください．

講演の準備に際して齋藤隆大さんから様々な助言をいただきました．ここに感謝いたします．

講演時の概要と参考文献は以下の通りです．

講演概要

D 加群は線形偏微分方程式系を代数的に扱う道具として，1970 年頃に佐藤幹夫によって提唱され柏原正樹によって理論が構築されました．今回の講演では，D 加群の考え方はどういうものなのか・何がうれしいのかについて雰囲気が分かるようにお話ししたいと思います．難しそうな D 加群（そして実際難しいと思います）ですが，その基本的なアイデアをじっくりと時間をかけて説明してみます．

線形代数ではまず行列を習いますが，あとで行列は基底を取ったときの線形写像を表示する方法だと分かったのでした．つまり，線形写像が本質的で行列はその一つの表示にすぎないのでした．実は線形微分方程式系と D 加群の関係もこれと似ていて，線形微分方程式系は D 加群の一つの表示とみなせます．このように考えて，微分方程式という具体的な表示ではなくて本質的な D 加群を調べようというのが D 加群の理論なのです．

D 加群の理論は数学の広範囲の分野と関係しています．講演の後半では，その広がりの中心的役割を演じる「リーマン・ヒルベルト対応」のお気持ちを説明してみます．微分方程式が与えられるとそこからトポロジー的なデータが取り出せますが，逆にトポロジー的なデータから微分方程式を作ることができるかということを考えます．この対応を D 加群の観点から述べたものがリーマン・ヒルベルト対応です．この対応がどのように様々な数学分野をつなぐかを講演者の話せる範囲で説明してみたいと思います．

参考文献

[1] 堀田良之，代数入門—群と加群—，裳華房，1987.

[2] 堀田良之，加群十話—代数学入門（すうがくぶっくす），朝倉書店，1988.

[3] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D*-Modules, Perverse Sheaves and Representation Theory, Vol. **236** of Progress In Mathematics, Birkhäuser, 2008.

[4] 柏原正樹，偏微分方程式系の代数的研究，東京大学修士論文，1970.

[5] 柏原正樹，代数解析概論（岩波講座 現代数学の展開），岩波書店，2000.

[6] J.-P. Schneiders, An introduction to D-modules, Bulletin de la société royale des sciences de Liege, **63** (1994), no. 3, 223–223.

$\mathcal{D}$-加群の理論とその広がり.

2021-04-03.

(ホモロジー) 代数的に線形微分方程式を解くためのアプローチ.

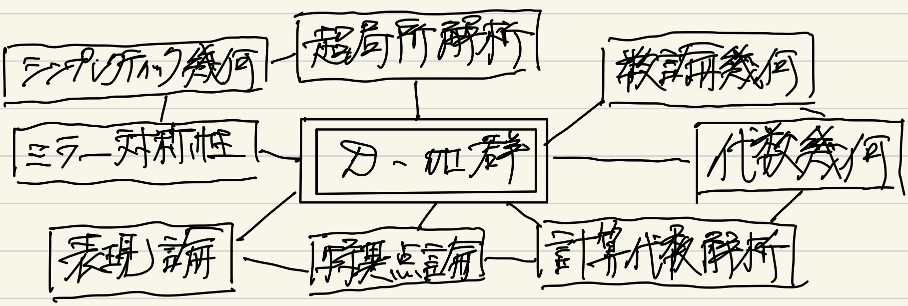
differential

- 1960年代に佐藤幹夫がアイデアを提唱
- 柏原正樹が修士論文(!)で基礎理論を完成.
  Bernstein も独立に理論を考えていた.
- 柏原とその周りの人々はその後 リーマン・ヒルベルト対応 をはじめとして様々な理論を構築.

よい微分方程式 $\xleftrightarrow{1:1}$ トポロジーのデータ.

⇝ 偏微分方程式論が個々の方程式を別々の方法で扱うスタイルから脱却して一般論を得た.

- 今では $\mathcal{D}$-加群は様々な分野で重要な役割を果たしている.



◎今回は
1. $\mathcal{D}$-加群の背景
2. $\mathcal{D}$-加群とは何か? 何がうれしいのか?
3. リーマン・ヒルベルト対応とは?
4. $\mathcal{D}$-加群の応用・広がり.

1. 背景：一次方程式・定数係数線形微分方程式

○ 連立一次方程式

例えば $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=0. \end{cases}$

どう解いたか？ 例えば

$$\begin{array}{rr} & 2x+y=3 \\ -) & 2x+4y=0 \\ \hline & -3y=3 \end{array} \qquad \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

大学で行列というものを習った。行列を使って上の方程式を書くと

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

一般には $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(A \in M(k,l;\mathbb{C}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^l,\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^k)$ の形.

これを解くアルゴリズムとして掃き出し法を習った。行基本変形する。 左から行列をかける

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\times} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-2]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\times} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\times(-\frac{1}{3})]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}\times} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$z = x+y$ としてみると方程式は

$$\begin{cases} 2z - y = 3 \\ z + y = 0 \end{cases}$$

に変わる。もちろん $z=1,\ y=-1$ が解なので、$x = z - y$ から $x=2$ もわかる。これらは形は違うけど本質的には同じ方程式。

行列で表すと何をしたん?

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ y\end{bmatrix}$$

基底変換.

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ y\end{bmatrix}$$

行列は基底を取ったときの線形写像の表示だった!

線形写像が大事で基底を取ると行列として姿をあらわす.

$A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ …① の形の方程式が特に大事. 斉次型.

$A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の解の一つを $\mathbb{x}_0$ とすると, 任意の解は $\mathbb{x}_0$ と ① の解の和.

($\because$ $A(\mathbb{x}-\mathbb{x}_0)=A\mathbb{x}-A\mathbb{x}_0=\mathbb{b}-\mathbb{b}=\mathbb{0}$).

例 $\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ … ②

⇒ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ が一つの解で $\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ の形

② の解は $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

① の解全体がどうなっているか知ることがまず大事.

○ <u>微分方程式</u> ・・・ 微分が入った方程式 $F(x, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$.

未知関数

多変数のとき偏微分を考える.

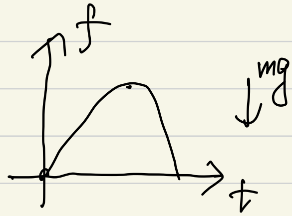
例
- $\frac{d}{dx} f(x) = a$ ⟿ 解: $f(x) = ax + c$
- $\frac{d}{dx} f(x) = ax$ ⟿ $f(x) = \frac{a}{2} x^2 + c$.
- $\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$ ⟿ $f(x) = ce^x$.

物理法則は微分方程式の形で書かれていることが多い.

例 運動方程式 $m \frac{d^2}{dt^2} f(t) = F$.

解くと物体の動きがわかる.

物を初速度 v_0 で上に投げたときの動き



$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} f = -mg \\ f(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} f(0) = v_0 \end{cases} \rightsquigarrow f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

・一般に <u>線形微分方程式</u> を考える.

未知関数とその偏導関数たちの一次式 $= 0$

$$a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} f(x) + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} f(x) + a_0(x) f(x) = g(x) \quad \cdots ③$$

の形. $g(x) = 0$ のとき <u>斉次型</u> と呼ばれる.

$\partial = \frac{d}{dx}$ とかくと $\frac{d^k}{dx^k} = \partial^k$ なので ③は $a_n(x) \partial^n f + \cdots + a_0(x) f = g$ と書ける.

↓これは単なる計算

$P(x,\partial) := a_n(x)\partial^n + \cdots + a_1(x)\partial + a_0(x)$ と書いて

これが関数に作用すると思う。$P(x,\partial)\cdot f$ も関数

$P(x,\partial)$：線形微分作用素

$$P(x,\partial)\cdot(c_1f_1+c_2f_2) = c_1P(x,\partial)f_1 + c_2P(x,\partial)\cdot f_2.$$

$$P(x,\partial): \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$$
$$C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$$
$$\vdots$$

という線形写像 $P(x,\partial): F \to F$ と思う。

③は $P(x,\partial)\cdot f = g$ と書ける。

斉次方程式 $P(x,\partial)\cdot f = 0$ …④ はこのときも大事

③：$P(x,\partial)\cdot f = g$ の解の一つを $f_0(x)$ とすると ③の解は斉次方程式④の解と $f_0(x)$ の和で書ける（$P(x,\partial)\cdot(f-f_0) = g-g=0$）

連立のときもOK（微分方程式系）

$P_{ij}(x,\partial)$ を線形微分作用素として

$$\begin{cases} P_{11}(x,\partial)f_1 + \cdots + P_{1l}(x,\partial)f_l = g_1 \\ \vdots \\ P_{k1}(x,\partial)\cdot f_1 + \cdots + P_{kl}(x,\partial)\cdot f_l = g_k \end{cases}$$

を考えられる。$P = (P_{ij}(x,\partial))_{i,j}$ を成分が微分作用素の $k\times l$ 行列として

$P: F^l \to F^k$ とみて $Pf = g$ と書ける。

定数係数のときは次のように代数的な考え方で統一的・システマティックに解ける。

$$P(\partial) = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_1\partial + a_0, \quad P(\partial)f(x) = 0 \quad -⑤$$

割って $a_n = 1$ にした。

∂ を変数 z にした z の多項式

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (P(\partial)\text{の特性多項式})$$

を考えると代数学の基本定理から

$$P(z) = (z-\lambda_1)^{m_1}\cdots(z-\lambda_g)^{m_g}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$$

$$m_1 + \cdots + m_g = n.$$

と因数分解できる。

補題

$(\partial-\lambda)^m f = 0$ の解は $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$ の線形結合で書ける。

∵) Leibniz 則（積の微分）から

$$\partial(e^{-\lambda x}g) = -\lambda e^{-\lambda x}g + e^{-\lambda x}\partial g = e^{-\lambda x}(\partial-\lambda)g$$

⇝ 作用素として $\partial \circ e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} \circ (\partial - \lambda)$.

よって $(\partial-\lambda)^m f = 0$ の両辺に $e^{-\lambda x}$ をかけると

$$0 = e^{-\lambda x}(\partial-\lambda)^m f = \partial e^{-\lambda x}(\partial-\lambda)^{m-1} f$$

$$= \cdots = \partial^m e^{-\lambda x} f$$

m 回積分すると $e^{-\lambda x}f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1}$ ⌟

<u>定理</u> ⑤の解は

$$\left.\begin{matrix} e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} & (m_1\text{コ}) \\ \vdots & \\ e^{\lambda_q x},\ xe^{\lambda_q x},\ \dots,\ x^{m_q-1}e^{\lambda_q x} & (m_q\text{コ}) \end{matrix}\right\}$$

の線形結合で書ける.

∵) n階方程式の解空間はn次元でこれらが一次独立なので示. ┘

$(\partial-\lambda_1)^{m_1}(\partial-\lambda_2)^{m_2} = (\partial-\lambda_2)^{m_2}(\partial-\lambda_1)^{m_1}$ と<u>交換することが大事</u>.

<u>例</u> $f''' + f'' - f' - f = 0$

$\rightsquigarrow p(z) = z^3 - z^2 - z - 1 = (z+1)^2(z-1)$

$f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{x}$ ┘

2. $\mathcal{D}$-加群の考え方

- 係数が関数のときは？

- 今回は簡単のため多項式係数の微分作用素を考える.

$$P(x,\partial) = \underbrace{a_n(x)}_{\in}\partial^n + \cdots + \underbrace{a_1(x)}_{\in}\partial + \underbrace{a_0(x)}_{\in}.$$

$\mathbb{C}[x]$

x をかける作用と微分は交換しない

$$(\partial x)\cdot f = \partial(x\cdot f) \overset{\text{Leibniz}}{=} f + x\cdot\partial f = (1+x\partial)\cdot f$$

作用素としては $[\partial, x] := \partial x - x\partial = 1.$ 正準交換関係

多項式係数の微分作用素全体は非可換環 D をなす

(環：加法 $+$ と乗法 $\cdot$ が定まっていて
加法について可換群, 乗法について半群, 分配法則が成立.)

D は x と ∂ で生成されていて (全部 $x^i\partial^j$ の線形和)
$[\partial, x] = \partial x - x\partial = 1$ の関係になっている.

すると $P(x,\partial)$ は D に住んでいると思える : $P(x,\partial) \in D$.

多変数のときも x_i, ∂_i $(i=1,\dots,d)$ で生成され

$$\begin{cases} [x_i, x_j] = 0 \\ [\partial_i, \partial_j] = 0 \\ [\partial_i, x_j] = \delta_{ij} \end{cases}$$

をみたす微分作用素環 D_d が考えられる.

differential

- 体上のベクトル空間を考えたようにDが作用する加群を考える.

M: 左D-加群, 加法+による可換群で $P\in D$, $m\in M$ に対し
$P\cdot m\in M$ が定まって(分配)法則・結合法則が成立.

例 ◦ $\mathbb{C}[x]$ は 左D-加群. (多変数のときは $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d]$)
x の作用はかけ算, ∂ の作用は微分とすればよい.

◦ $\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \{\mathbb{C}$ 上の正則関数$\}$ も左D-加群.
(多変数のときは $\mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ が左 D_d-加群.)

◦ $\mathcal{O}(\mathbb{C}^d)^N$ が左 D_d-加群ならば $i=1,\dots,d$ に対して

$$\nabla_{\partial_i} : \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)^N \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)^N,$$
$$s \longmapsto \partial_i s + A_i s \qquad A_i \in M(N;\mathcal{O}(\mathbb{C}^d))$$

が定まっている. $[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] = 0$ 可積分接続

◦ D それ自身も左D-加群 (左からの乗法により).

これが特別に大事.

② $P\in D$ 微分作用素としたとき商加群 $D/D\cdot P$ は左D-加群

元は $[Q]$ $(Q\in D)$ で $[Q]=[R] :\Leftrightarrow Q-R\in D\cdot P$ 左作用で閉じてる.

Dでは違うけど同じだと見なす. $[1]=[4]$

(cf. $\mathbb{Z}$ を3で割った余りが等しいとき同じと見なす ⤳ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)

- 加群の間の関係を調べるために構造を保つ写像を考える.

M, N: 左D-加群, 左D-加群の射(準同形) $\varphi : M\to N$

とは加法とDの作用を保つもの: 1) $\varphi(m_1+m_2)=\varphi(m_1)+\varphi(m_2)$

D作用を無視すると可換群の構造だけ見る. 2) $\varphi(P\cdot m) = P\cdot\varphi(m)$.

$\mathrm{Hom}_D(M,N) := \{\varphi : M \to N$, 左D-加群の射$\}$

加法で可換群になる.

$\varphi : M \to N$, $\psi : N \to M$, 左D-加群の射が存在して

$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_N$ をみたすとき M と N は同形といい $M \simeq N$ とかく.

D-加群としては同じもの.

例 ◦ $P \in D$ としたとき

$\cdot P : D \longrightarrow D$, $Q \longmapsto Q \cdot P$ は左D-加群の射.

より一般に $P \in M(k,l;D)$ として D^k, D^l をヨコベクトル

として見ると $\cdot P : D^k \longrightarrow D^l$ は左D-加群の射.

$$[\overbrace{\quad\quad}^{k}]^{k}[\ \ ^{l}\ \ ]$$

◦ $\mathrm{Hom}_D(D,M) \simeq M$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(D,M) & \simeq & M \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(1) \\ (P \mapsto P \cdot m) & \longleftarrow\!\shortmid & m \end{array}$$

$\varphi(P) = \varphi(P \cdot 1) = P \cdot \varphi(1)$.

- 加群の射 $\varphi : M \to N$ に対して

$\mathrm{Ker}\,\varphi := \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\} \subset M$.

$\mathrm{Im}\,\varphi := \{\varphi(m) \in N \mid m \in M\} \subset N$.

と定める $F = \mathbb{C}[x]$, $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\cdots$: 考えたい関数空間(左D-加群)

$P \in D$, $P\cdot : F \longrightarrow F$ に対して

$\mathrm{Ker}(P\cdot : F \to F) = \{f \in F \mid P \cdot f = 0\}$ ← 斉次方程式の解空間!

$\mathrm{Im}(P\cdot : F \to F) = \{P \cdot f \in F \mid f \in F\}$　$g \in \mathrm{Im}(P\cdot)$?

◦ P に付随する左$\mathcal{D}$-加群から $\mathrm{Ker}(P\cdot)$ がわからないか?

(cf. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, F) \simeq F$ ⇢ F全体でなく $\{f \in F \mid P \cdot f = 0\}$ がほしい)

これが $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$!

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ker}(P\cdot F \to F) \\
\varphi & \longmapsto & \varphi([1]) \\
([Q] \mapsto Q\cdot f) & \longleftarrow & f
\end{array}
$$

$[P] = 0$ in M

$P\cdot\varphi([1]) = \varphi(P\cdot[1]) = \varphi([P]) = 0$

$QP\cdot f = Q(P\cdot f) = 0$

well-defined

$M = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$ という左$\mathcal{D}$-加群から $P\cdot f = 0$ という斉次型線形微分方程式の解空間がわかる!
(実は $P\cdot f = g$ もわかる)

⇝ $P\cdot f = 0$ という方程式からではなく左$\mathcal{D}$-加群からスタートする。
これが $\mathcal{D}$-加群の理論の考え方.

- 完全列からの説明.

$\mathcal{D} \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D} \to M \to 0$ は左$\mathcal{D}$-加群の完全列

ここに $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, F)$ という左完全関手を施すと

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, F) & \xrightarrow{{}^t(\cdot P)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, F) & \text{完全.} \\
& \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & \\
& \mathrm{Ker}(P\cdot : F \to F). & & F & \xrightarrow{P\cdot} & F &
\end{array}
$$

○この考え方の何がうれしいのか？

ただ代数の言葉に直しただけ？ いや少なくとも3つうれしいことがある。

I) 偏微分方程式系も同じ枠組で扱える。

$$\begin{cases} P_{11}f_1 + \cdots + P_{1l}f_l = 0 \\ \quad\vdots \\ P_{k1}f_1 + \cdots + P_{kl}f_l = 0 \end{cases}$$

も同じように考えられる。

$P = (P_{ij})_{ij} \in M(k, l; D_d)$ として

$$D^k \xrightarrow{\circ P} D^l \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

：完全で M を定めると

ヨコベクトル

$$\mathrm{Hom}_D(M, F) \simeq \{ f = {}^t(f_1, \dots, f_l) \in F^l \mid P \circ f = 0 \}$$

本当に同じように扱える。

II) 方程式と解をさがす空間を分離できている。

微分方程式の形だと未知関数 f はどこにいる？と思うが

$\mathrm{Hom}_D(M, F)$ と書くと

- 微分方程式を司る $\mathrm{Hom}_D(M, -)$ と
- 解をさがしたい空間 F

に分かれている。

・$\mathrm{Hom}_D(M, -)$ が微分方程式を関手的に表現している。

・F を入れると F における微分方程式の解空間が顕現。

III) 見かけの形は違うが同値な方程式を同じと扱える.

例　$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ として $(x\partial - \alpha) f = 0 \cdots ⑥$ を考える.

$\rightsquigarrow$ 解: $f(x) = x^{\alpha}$

$g(x) := x f(x)$ と定めると

$(x\partial - \alpha - 1)x = x(1 + x\partial) - x\alpha - x = x(x\partial - \alpha)$ だから

$(x\partial - \alpha - 1) g = (x\partial - \alpha - 1) x f = x(x\partial - \alpha) f = 0 \cdots ⑦$

$\rightsquigarrow$ 解: $g(x) = x^{\alpha+1}$

逆に g が⑦をみたすとすると $f(x) = \frac{1}{\alpha+1} \partial g(x)$ と定めれば

f は⑥をみたす. これらの変換で⑥と⑦は同値.

未知関数として f をとるか g をとるかは人為的で本質的でない.

$\mathcal{D}$-加群を使うと?　上の変換で左 $\mathcal{D}$-加群として同形.

$$M_1 := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial - \alpha) \simeq M_2 := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial - \alpha - 1)$$

注意　$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M_i, \mathcal{O}(\mathbb{C}))$ を考えると本当はダメ

x^{α} は $x = 0$ で正則でないから. 局所的に考えないといけない.

与えられた左 $\mathcal{D}$-加群 M に対して, $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$ という左 $\mathcal{D}$-加群の同形があったとすると, これが $P \cdot f = 0$ に対応した.

別の $Q \in P$ で $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot Q$ となるかもしれず. このときは $Q \cdot g = 0$.

一般に $\mathcal{D}^{k} \xrightarrow{P} \mathcal{D}^{\ell} \to M \to 0$ という完全列をとると $P \cdot f = 0$ という表示を得る.

D-加群 $\mathcal{M}$ からスタートすると表示のとり方によって
微分方程式の形が変わる.
同値な方程式を同じだと思う良いアプローチ.

$\boxed{\text{線形代数}}$ 行列 $\overset{\text{抽象化}}{\rightsquigarrow}$ 線形写像

$\boxed{\text{D-加群理論}}$ 微分方程式 $\underset{\text{一つの表示}}{\leftsquigarrow}$ D-加群.

こちらが本質的!

3. リーマン・ヒルベルト対応(あらすじ)

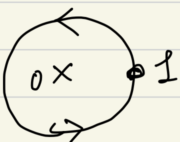
微分方程式とトポロジーのデータの対応.

さっきの微分方程式 $(x\partial-\alpha)f=0$ を考える.

解の一つは $f(x)=x^\alpha$ ⋯> $\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ でないと $x=0$ で正則でない.

微分の最高次 ∂ の係数を1にしようとわったときまずくなる点を特異点という.(そうしたときの係数の特異点)

$f(x)=x^\alpha$ について $1\in\mathbb{C}$ から特異点 0 を 1 周まわってみる.



$x^\alpha \longmapsto e^{2\pi i\alpha}x^\alpha$ と変わった!

↑これも微分方程式の解

解を解にうつす変換がおこっている: $e^{2\pi i\alpha}$ かかる.

つまり微分方程式があるとヤバい点をまわると解がどう変換されるかが決まる.

モノドロミー

もっと一般に $P(x,\partial)=a_n(x)\partial^n+\cdots+a_1(x)\partial+a_0(x)\in D$ として

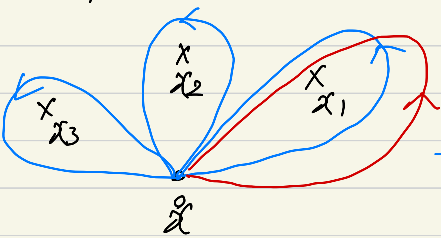
$P(x,\partial)\cdot f=0$ という斉次方程式を考える.

$a_n(x_0)\neq 0$ となる x_0 の近くでは n 個の独立な解をもつ(解空間は n 次元)

$a_n(x_0)=0$ となる x_0(特異点)のまわりでは何がわかるのか?

(本当は $x=\frac{1}{y}$ の変換をして $x=\infty$ についても特異点を考える)

$x \in \mathbb{C}$ を $a_n(x) \neq 0$ となる点として一つ固定.



特異点をまわる道にそって解をつなげて追っていくと戻ってきても解になる.
解析接続.

上で見たようにまわってくると別の解になりうる.

xでの近くの独立な解を $f_1, \dots, f_n$ とすると特異点をまわると

$$f_i \longmapsto c_{i1} f_1 + \cdots + c_{in} f_n$$ と変換される.

モノドロミー行列

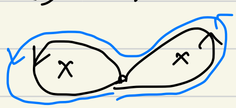
xから出て特異点をまわる道をとるごとに行列 $(c_{ij})_{ij} \in M(n;\mathbb{C})$ が定まる. 逆向きにまわると元に戻るので可逆: $GL(n;\mathbb{C})$の元.

$D = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{C}$: 特異点全体 (本当は $\subset \mathbb{CP}^1$) とすると

道を $\mathbb{C} \setminus D$ (本当は $\mathbb{CP}^1 \setminus D$) の中で連続に変形しても解の変換は同じまま (モノドロミー定理).

xから出て $\mathbb{C} \setminus D$ ($\mathbb{CP}^1$) を通り xに戻ってくる道を連続な変形でうつり合うものは同一視したものを $\pi_1(\mathbb{C} \setminus D, x)$ と書く.

道をつないで群になるので基本群 ($\mathbb{CP}^1$) と呼ぶ.



微分方程式 $Pf = 0$ があると群の射 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus D, x) \to GL(n;\mathbb{C})$ ($\mathbb{CP}^1$)

(基本群の表現)が定まることをいっている. モノドロミー表現.

Q. 逆に基本群の表現があったときに微分方程式はつくれるか?

どんな形の特異点も許すとモノドロミーで区別できないので制限する.

例　$(x^2\partial+1)f=0 \rightsquigarrow f(x)=e^{\frac{1}{x}}$　モノドロミーが自明

$x=0$での増大度が大きすぎる.

解がこういう風にならないマイルドな特異点：確定特異点

リーマン・ヒルベルト問題

確定特異点型微分方程式(系) $\rightsquigarrow$ モノドロミー表現
$\leftsquigarrow$??

Deligne：可積分接続の設定で高次元化

Kashiwara：$\mathcal{D}$-加群に一般化して定式化、証明

(後にMebkhoutも同じ結果を得た)

◦ どういう主張の?…雑に説明したい.

微分方程式を局所的に(各点の十分小さい近傍で)考えて

あとでペタペタ貼り合わせて全体にのばしたいことがある.

e.g. 層：開集合Uに対して$\mathcal{F}(U)$：ベクトル空間/環/加群が定まって

$U\subset V$に対し　$\mathcal{F}(V)\to\mathcal{F}(U)$があって貼り合わせ条件を

制限　　　　　　　　　　　　　　　　　満たす.

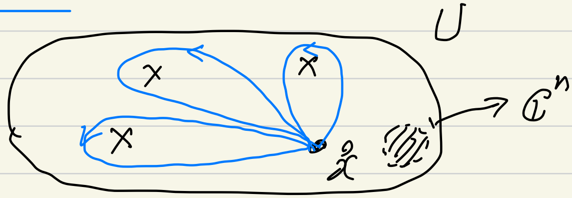
$\mathcal{O}$：$\mathbb{C}^d$上の正則関数の層, $\mathcal{D}$：$\mathbb{C}^d$上の環の層.

$\mathcal{M}$：(連接) $\mathcal{D}$-加群が微分方程式を局所的に考えることに相当.

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{O})$：$\mathbb{C}^d$上の解の層.

実は $\pi_1(U,\dot{x})$ の表現と U 上の局所的にまっすぐな有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間の層が 1:1 に対応

局所系



解の層はそうなっているの？…No

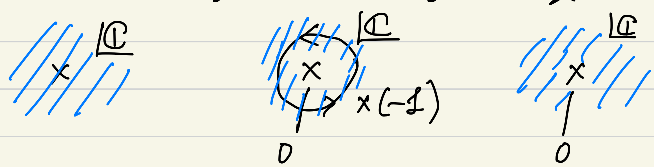
例 ・$(x\partial-1)f=0 \rightsquigarrow f(x)=x$; 解の層は $\mathbb{C}$ 上定数

どこでも同じ

・$(x\partial-\frac{1}{2})f=0 \rightsquigarrow f(x)=\sqrt{x}$; $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上モノドロミーは -1

0 で 0

・$(x\partial+1)f=0 \rightsquigarrow f(x)=\frac{1}{x}$; $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上定数, 0 で 0.



$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ と $\{0\}$ 上局所系

確定特異点型に対応するD-加群：確定特異点型ホロノミックD-加群.

この解の層は分割するとそれぞれのパートで局所系になる層になる！

(Kashiwara '75) 構成可能層

リーマン・ヒルベルト対応 Kashiwara '80, '84

$$\boxed{\{\text{確定特異点型ホロノミック}\mathcal{D}\text{-加群}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{構成可能層}\} \quad \text{“}M \longmapsto Hom_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{O})\text{”}}$$

解析　トポロジー

正確には X: 複素多様体 $D^b_{reghol}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^b_{constr}(\mathbb{C}_X)$

$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(-,\mathcal{O}_X)$

4. $\mathcal{D}$-加群の応用・広がり

1) 計算代数解析

微分方程式を環と加群の言葉に変換できるので、
グレブナー基底などの代数の道具を使って計算アルゴリズムが
得られる。(Oaku, ---)

2) b-関数

$0 \neq f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ に対して $\mathcal{D}$-加群を用いると次が示せる。

0でない1変数多項式 $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ と微分作用素

$$P(s, x, \partial) = \sum_\alpha p_\alpha(s, x) \partial^\alpha, \quad p_\alpha(s, x) \in \mathbb{C}[s, \underset{(x_1, \dots, x_d)}{x}]$$

が存在して $b(s) f^s = P(s, x, \partial) f^{s+1}$ $(s \in \mathbb{C})$ をみたす。

(f に関係する $\mathcal{D}_d$-加群 N_f がホロノミックという)

このような $b(s)$ の中で次数最小のものを b-関数 または
佐藤-Bernstein 多項式という

b-関数は次の解析接続の問題に関わる。

$f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ と仮定 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$：急減少関数

$$F(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^s \varphi(x)\, dx \rightsquigarrow F(s) : \mathrm{Re}(s) > 0 \text{ で正則}.$$

$\underline{Q}$ $F(s)$ を $\mathbb{C}$ 上に有理型関数として解析接続できるか？

(Gelfand '54)

ガンマ関数は特殊な場合で、このときはYes.

$$s\Gamma(s) = \int_0^\infty \underbrace{st^{s-1}}_{(t^s)'} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt = \underline{\Gamma(s+1)}$$

Re(s) > −1 で正則.

・b-関数を使うと同じことができる.

$$b(s)F(s) = \int_{\mathbb{R}^d} b(s)f(x)^s\varphi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} P\cdot f(x)^{s+1}\varphi(x) = \underline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{s+1} P^{*}\varphi(x)\,dx}$$

形式随伴.

Re(s) > −1 で正則.

b(s)の零点がfの特異性に関わる.

— 最近はベイズ統計や安数ゲアル層とも関係している.
(Watanabe)　(Saito, …)

3) <u>リーマン・ヒルベルト対応は解析とトポロジーをつなぐ.</u>

。局所系・モノドロミーというトポロジーで基本的な対象を調べるのにシステマティックにD-加群が使える.

。RH対応でD-加群側の特殊なものたちに対応する構成可能層を<u>偏屈層</u>という.

⇝ これを使って特異空間でもPoincaré双対性が成り立つコホモロジーをつくることができる.

4) 表現論との関わり：Kazhdan-Lusztig 予想

「半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の Verma 加群と既約最高ウェイト加群の指標たちが Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれるもので結びついている」という予想.

Brylinski-Kashiwara '81 と Beilinson-Bernstein '81 が独立に証明

<u>概略</u>　KL 多項式には <u>トポロジー的な表示</u>がある.
偏屈層を使う.

KL多項式

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{偏屈層}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{RH対応}"'] & \boxed{\mathcal{D}\text{-加群}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Beilinson-Bernstein対応}"'] & \boxed{\mathfrak{g}\text{-加群}} \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ 幾何学的表現論という分野へ発展していく.

参考文献（上の方が比較的簡単，下の方が難しい）

- 堀田良之；加群十話―代数学入門，すうがくぶっくす，朝倉書店．
- 堀田良之；代数入門：群と加群，数学シリーズ，裳華房．
- 大阿久俊則；D加群と計算数学，すうがくの風景，朝倉書店．
- Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki; D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory, Progress in Mathematics, Birkhäuser
- 竹内潔；D加群，数学の輝き，共立出版
- 柏原正樹；代数解析概論，岩波書店