有限/対称多重ゼータ値

川村花道 (HANAMICHI KAWAMURA)

この文章について (2022 年 7 月 14 日追記)**.** このテキストは, NPO 法人[1]数学カフェ[2]によって 2021 年 6 月 6 日に開催された第 35 回数学カフェの講演に際して筆者 (川村) が作成したノートに, いくつか誤りの訂正や記号の変更などを施したものです. 作成当時からこの追記を書いている現在までの一年間に (未解決問題が解けたなど) 事情が変わったものもありますが, 今のところはそのままになっています. 申し訳ありません.

ノート内の誤植や, 何か変更すべき点などありましたら川村のメール `1121026@ed.tus.ac.jp`, Twitter `@1806_04679`, Instagram `@oushiza_rhapsody` のいずれかにご連絡ください.

Preface

多重ゼータ値 (*multiple zeta value*, *MZV*) とは無限級数

$$\zeta(k_1,\dots,k_r)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\qquad(k_1,\dots,k_{r-1}\geq 1,\ k_r\geq 2)$$

によって定まる実数 $\zeta(k_1,\dots,k_r)$ のことである. その歴史は Euler や Goldbach による級数

$$\zeta^\star(k_1,k_2)=\sum_{0<m\leq n}\frac{1}{m^{k_1}n^{k_2}}$$

の考察に始まり, 一般のケースは 1990 年代初頭に Butzer–Markett–Schmidt [BMS] や Hoffman [Ho1], Zagier [Za1] によって定義された[3]. その後数多くの研究がなされ, 様々な変種も考案される中で現在に至っている. このテキストは, そのような変種の中でも大きな研究対象として名を馳せている "有限多重ゼータ値" と "対称多重ゼータ値" について概説するものである. これらは 2010 年代の初めに Kaneko, Zagier の両名によって考案され, 切っ掛けとなる論文 [KZ] がいまだ出版されていないながらも今までに数多くの結果が証明されている. また, 近年 Rosen [Ro1], Seki [Se1], Jarossay [J3] などによって考案された, 有限/対称多重ゼータ値の "精密化" である $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータ値, t 進対称多重ゼータ値についても現状で知られていることを可能な限り述べた. 本テキストは概ね小野雅隆氏ならびに関真一朗氏の解説記事 [On2], [Se2] に基づいて, さらに近年得られた結果を詳述したデータベースのようなものを目指している. 有限/対称の文脈だけでなく, それらの研究の動機として不可欠である古典的な意味での多重ゼータ値についても必要な事項をなるべく記載してある.

本文全体を通して $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ (有理) 整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表す. 数学的対象 x,y に対し Kronecker のデルタ

$$\delta_{x,y}=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (x\neq y)\end{cases}$$

を用いることが多い. また, 慣習として $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{h}$ をインデックス (§1 を参照), $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ を非負整数の列を表す記号として用いることが多いが, その都度述べる. 空和, 空積はそれぞれ 0, 1 と定める.

Contents

---

[1]当時は任意団体.

[2]`https://mathcafe.net`

[3]実際は 1981 年に Ecalle [Ec] が該当する級数を定義しているが, 彼の考察は resurgent analysis という文脈で mould という概念を定義した際に例として挙げるに留まっている.

1. 準備: Hoffman 代数とインデックス

本節では多重ゼータ値やその変種を記述するのに不可欠な "インデックス" に関するいくつかの定義, 記号とそれを代数的に扱う枠組みである "Hoffman 代数" について述べる.

1.1. インデックス.

集合

$$\mathcal{I}_0 := \bigsqcup_{r\geq 0} \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$$

の元をインデックス (*index*) と呼ぶ. ただし $r=0$ の部分は一元集合 $\{\varnothing\}$ であると考え, その元 $\varnothing$ を空インデックス (*empty index*) という. また, 最後の成分が 2 以上であるインデックスを許容インデックス (*admissible index*), あるいは単に許容的 (*admissible*) であるという. 便宜上 $\varnothing$ も許容インデックスであるということにする. 二つのインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$, $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_s)$ が与えられたとき, 成分同士を結合させた (concatenation) インデックスを $(\mathbf{k},\mathbf{l})=(k_1,\ldots,k_r,l_1,\ldots,l_s)$ と書く. また, 同一の成分 X を周期的に r 個繰り返すインデックスを $\{X\}^r$ と書くことにする: たとえば

$$\{1\}^5=(1,1,1,1,1), \qquad \{1,2\}^3=(1,2,1,2,1,2)$$

である.

定義 1.1.1. $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ をインデックスとする.

(1) $\mathbf{k}$ の成分の個数 r を $\mathbf{k}$ の深さ (*depth*) といい, $\mathrm{dep}(\mathbf{k})$ で表す.
(2) $\mathbf{k}$ の成分の総和を $\mathbf{k}$ の重さ (*weight*) といい, $\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ で表す.
(3) $\mathbf{k}$ の 2 以上の成分の個数を $\mathbf{k}$ の高さ (*height*) といい, $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ で表す.

空インデックス $\varnothing$ の深さ, 重さ, 高さはすべて 0 であるものとする. 同じ深さのインデックス $\mathbf{k}_1=(k_{1,1},\ldots,k_{1,r})$, $\mathbf{k}_2=(k_{2,1},\ldots,k_{2,r})$ に対し成分ごとの和を $\mathbf{k}_1\oplus\mathbf{k}_2=(k_{1,1}+k_{2,1},\ldots,k_{1,r}+k_{2,r})$ と書く. なお, 以上の用語や記号はインデックスだけでなく非負整数の組に対しても用いることがある.

深さ r, 重さ k, 高さ s のインデックス (resp. 許容インデックス) 全体の集合を $I(k,r,s)$ (resp. $I_0(k,r,s)$) と書き, 高さの情報を忘れたものを

$$I(k,r) := \bigsqcup_{s=0}^{r} I(k,r,s) \qquad \left(\text{resp. } I_0(k,r) := \bigsqcup_{s=0}^{r} I_0(k,r,s)\right)$$

と書く.

定義 1.1.2. 二つの空でないインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$, $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_s)$ $(r,s\geq 1)$ に対し, $\mathbf{k}$ と同じ深さのインデックス $I_{\mathbf{k},\mathbf{l}}=(i_1,\ldots,i_r)$ であって

(1) $i_1<\cdots<i_r=s$.
(2) 任意の $j\in\{1,\ldots,r\}$ に対し $k_j=\sum_{n=i_{j-1}+1}^{i_j} l_n$.

を満たすものが存在するとき $\mathbf{k}$ を $\mathbf{l}$ の縮約インデックス (*contraction index*) といい, $\mathbf{k}\preceq\mathbf{l}$ と書く.

直感的には "縮約インデックスとは元のインデックスの隣り合う成分をいくつか足したもの" であると思うことができ, たとえば $(3)\preceq(2,1),(1,2)\preceq(1,1,1)$ が成り立つ.

定義 1.1.3. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$\mathbf{k}_{\rightarrow}=(k_1,\ldots,k_r,1),\qquad \mathbf{k}_{\uparrow}=(k_1,\ldots,k_r+1),\qquad \mathbf{k}_{\downarrow}=(k_1,\ldots,k_r-1),$$
$$_{\leftarrow}\mathbf{k}=(1,k_1,\ldots,k_r),\qquad _{\uparrow}\mathbf{k}=(1+k_1,\ldots,k_r),\qquad _{\downarrow}\mathbf{k}=(-1+k_1,\ldots,k_r)$$

と書く. 矢印の冪はその個数分矢印を並べることを表す. また, 空インデックスに対しては $\varnothing_{\rightarrow}={}_{\leftarrow}\varnothing=(1)$, $\varnothing_{\uparrow}=\varnothing_{\downarrow}={}_{\uparrow}\varnothing={}_{\downarrow}\varnothing=\varnothing$ と定める.

定義 1.1.4. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し $\overleftarrow{\mathbf{k}}=(k_r,\ldots,k_1)$ を $\mathbf{k}$ の逆転インデックス (*reverse index*) という. $\overleftarrow{\varnothing}=\varnothing$ である.

定義 1.1.5. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と整数 $0\leq i\leq r$ に対し

$$\mathbf{k}_{[i]}=(k_1,\ldots,k_i),\qquad \mathbf{k}^{[i]}=(k_{i+1},\ldots,k_r)$$

とおく. ここで $\mathbf{k}_{[0]}=\mathbf{k}^{[r]}=\varnothing$ である.

1.2. **Hoffman 代数.** 有理係数の二変数非可換多項式環を $\mathfrak{H}=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ と書き,

$$\mathfrak{H}^1=\mathbb{Q}+e_1\mathfrak{H},\qquad \mathfrak{H}^0=\mathbb{Q}+e_1\mathfrak{H}e_0$$

をその部分代数とする. インデックス, 許容インデックスの $\mathbb{Q}$ 係数形式的線型和全体の集合をそれぞれ

$$\mathcal{R}_0=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\mathcal{I}_0,\qquad \mathcal{R}_0'=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\mathcal{I}_0'$$

と書く. このとき $z_{\varnothing}=1\in\mathfrak{H}^1$ とおき, 空でないインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$z_{\mathbf{k}}=e_1e_0^{k_1-1}\cdots e_1e_0^{k_r-1}$$

と定めることで, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\mathcal{R}_0\ni\mathbf{k}\mapsto z_{\mathbf{k}}\in\mathfrak{H}^1$ $(\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0)$ は全単射となる. このことを, とくに生成元どうしの対応 $\mathbf{k}\leftrightarrow z_{\mathbf{k}}$ を指して, word とインデックスの対応という. ここで word とは e_0,e_1 からなる有限個の文字列 (モニックな単項式, 1 も含む) のことを意味する. この写像は $\mathfrak{H}^0$ に制限すると $\mathcal{R}_0'$ への全単射となる (つまり $\mathfrak{H}^0$ の word が許容インデックスに対応する.). また, この対応を通してインデックスの深さ, 重さ, 高さはそれぞれ対応する word に含まれる e_1 の個数, e_0,e_1 の総数, e_1e_0 の個数であるということができる. この用法で $\mathfrak{H}^1$ に対して写像 dep, wt, ht を $\mathbb{Q}$ 線型に延長して使うことがある.

注意 1.2.1. しばしば $\mathfrak{H}$ の元 w に対し, 各項に含まれる word の綴り (文字の順番) を逆にする意味で $\overleftarrow{w}$ と書くことがあるが, インデックスと word の対応があるからといって $\overleftarrow{\mathbf{k}}$ と $\overleftarrow{z_{\mathbf{k}}}$ を同一視してはならない: 前者に対応する word は $e_1e_0^{k_r-1}\cdots e_1e_0^{k_1-1}$ であるが, 後者は $e_0^{k_r-1}e_1\cdots e_0^{k_1-1}e_1$ である.

1.3. **調和積.** 調和積とは多重ゼータ値の関係式を述べる際に頻出する積構造の一つであり, 次小節で述べる "シャッフル積" とともに多重ゼータ値の代数構造の双璧を成している. ここでは次節以降に様々な関係式を述べる際必要な事項を書き並べるので, 必要に応じて参照されるとよい.

定義 1.3.1. 調和積 (*harmonic product, stuffle product.* 著者によっては級数シャッフル積 (*series shuffle product*) とも) を $\mathfrak{H}^1$ 上の $\mathbb{Q}$ 双線型な積 $*$ として, 次の規則で帰納的に定める:

$$1*w=w*1=w,$$
$$wz_k*w'z_l=(wz_k*w')w_l+(w*w'z_l)z_k+(w*w')z_{k+l}.$$

ここで $w,\ w'\in\mathfrak{H}^1$ であり, $k,\ l$ は正整数とした.

インデックスと word の対応を通して調和積は $\mathcal{R}_0$ でも考えられるため, これを $\mathbf{k}*\mathbf{l}$ などと書く. たとえば

$$(2,1)*(3)=(2,1,3)+(2,3,1)+(3,2,1)+(2,4)+(5,1)$$

となる.

深さごとに帰納的に計算していくことで, 次の事実がわかる.

命題 1.3.2 (Hoffman [Ho2, Theorem 2.1])**.** 積 $*$ は結合的かつ可換である.

この事実より $*$ を備えた $\mathfrak{H}^1$ (resp. $\mathfrak{H}^0$) は可換な $\mathbb{Q}$ 代数となるので, これを $\mathfrak{H}^1_*$ (resp. $\mathfrak{H}^0_*$) と書く. なお, 多重ゼータ値初期の論文 (たとえば 1997 年の [Ho2]) では $w*e_0^k=e_0^k*w=e_0^kw$ として調和積を $\mathfrak{H}$ 全体に定義しているが, 現代ではこの定義はあまり用いられない.

命題 1.3.3 (Hoffman [Ho2, Theorem 3.1, Theorem 4.1])**.** 同型 $\mathfrak{H}^1_*\simeq\mathfrak{H}^0_*[e_1]$ が成り立つ. 即ち任意の $w\in\mathfrak{H}^1$ に対しある非負整数 n と $\mathfrak{H}^0$ の元 $w_0,\dots,w_n$ が存在し

$$w=\sum_{i=0}^{n}w_i*e_1^{*i}$$

となる. ここで e_1^{*i} は i 個の e_1 の調和積 $\underbrace{e_1*\cdots*e_1}_{i}$ を意味する.

この表示による "定数項" w_0 をしばしば $\mathrm{reg}_*(W)$ と書く. 次の命題はこの写像を使ってより高次の係数を具体的に記述できることを主張する.

命題 1.3.4 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Corollary 5])**.** 任意の $w\in\mathfrak{H}^0$ と非負整数 n に対し

$$we_1^n=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{reg}_*(we_1^{n-i})*\frac{e_1^{*i}}{i!}$$

が成り立つ.

準同型 $\tilde{S}\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $e_0\mapsto e_0$ と $e_1\mapsto e_0+e_1$ から定め, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $S^1\colon\mathfrak{H}^1\to\mathfrak{H}^1$ を $w\in\mathfrak{H}$ に対し $S^1(e_1w)=e_1\tilde{S}(w)$ とおくことで定める. この写像は多重ゼータスター値 (§2.4 参照) を記述する際に重要となる. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し $S^1(z_{\mathbf{k}})$ に対応する $\mathcal{R}_0$ の元をしばしば $\mathbf{k}^\star$ と書き, これは定義より $\mathbf{k}$ の縮約インデックス全体の和になる: たとえば $\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)$ に対し

$$\mathbf{k}^\star=\sum_{\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}}\mathbf{l}=(k_1,k_2,k_3)+(k_1,k_2+k_3)+(k_1+k_2,k_3)+(k_1+k_2+k_3)$$

である.

命題 1.3.5 (Hopf 代数構造; Hoffman [Ho4])**.** 標数 0 の体 $\mathbb{K}$ に対し $\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}=\mathbb{K}+e_1\mathbb{K}\langle e_0,e_1\rangle$ と書くと, これには次のようにして $\mathbb{K}$ 上の Hopf 代数構造が入る.

(1) 積は調和積 $*$ を $\mathbb{K}$ 双線型にしたものである (定義 1.3.1 で $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{K}$ に変える.).
(2) 単位射は埋め込み $\eta\colon\mathbb{K}\ni a\mapsto a\in\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}$ である.
(3) 余積はインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\Delta^*(z_{\mathbf{k}})=\sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}z_{\mathbf{k}_{[i]}}\otimes z_{\mathbf{k}^{[i]}}$$

として定まる $\mathbb{K}$ 線型写像 $\Delta^*\colon\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}\mapsto\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}\otimes\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}$ である.
(4) 余単位射は $\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}$ の元を e_0,e_1 の多項式と見たときの定数項を与える写像 (つまり $e_0\mapsto 0$, $e_1\mapsto 0$ から定まる $\mathbb{K}$ 代数としての準同型) ϵ である.
(5) 対蹠射はインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$S^*(z_{\mathbf{k}})=(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}S^1(z_{\overleftarrow{\mathbf{k}}})$$

として定まる $\mathbb{K}$ 線型写像 $S^*\colon\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}\to\mathfrak{H}^1_{\mathbb{K}}$ である.

とくに $\mathfrak{H}^1$ は $\mathbb{Q}$ 上の Hopf 代数となる.

なお, Hoffman [Ho4] は $\mathfrak{H}^1_*$ が準対称関数 (*quasi-symmetric function*) のなす $\mathbb{Q}$ 代数と同型であることを示しており, そこに Hopf 代数の構造を入れる形で示している. また, 調和積と後述のシャッフル積を包括的に考える *quasi-shuffle product*[4] という枠組みが [Ho3] で考案されており, 命題 1.3.5 と命題 1.4.6 を同時に示している. 現状, 本テキストでは準対称関数や quasi-shuffle product をこれ以上詳しく論じる予定はない.

系 1.3.6. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}_{[i]})} \mathbf{k}_{[i]} * (\mathbf{k}^{[i]})^\star = \delta_{\mathbf{k},\varnothing} \varnothing$$

が成り立つ.

命題 1.3.7 (Hoffman [Ho3, Theorem 3.2])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\mathbf{k}^\star = \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_l)=\mathbf{k} \\ \mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_l \neq \varnothing}} (-1)^{r-l} \overleftarrow{\mathbf{k}_1} * \cdots * \overleftarrow{\mathbf{k}_l}$$

が成り立つ.

次の命題は多重ゼータ値の対称和公式と呼ばれる関係式を導くのに使われる.

命題 1.3.8. 空でないインデックス $(k_1, \ldots, k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\ldots,B_N} (-1)^{r-N} (b_1-1)! \cdots (b_N-1)! (k_{b_1}) * \cdots * (k_{b_N}),$$
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(r)})^\star = \sum_{B_1,\ldots,B_N} (b_1-1)! \cdots (b_N-1)! (k_{b_1}) * \cdots * (k_{b_N})$$

が成り立つ. ここで $\{B_1, \ldots, B_N\}$ は $\{1, \ldots, r\}$ の分割全体を渡り, $\mathfrak{S}_r$ は r 次の対称群, $b_i = \sum_{j \in B_i} k_j$ とした.

Proof. 集合の分割についての用語をいくつか復習する: 有限集合 S の分割とは有限個の空でない部分集合の族 $\{B_1, \ldots, B_N\}$ であって

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i, \qquad B_i \cap B_j = \begin{cases} B_i & (i=j) \\ \varnothing & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすものである. また, S の分割 $B = \{B_1, \ldots, B_N\}$, $C = \{C_1, \ldots, C_M\}$ に対し C が B の細分であるとは, 任意の $1 \le i \le M$ に対しある $1 \le j \le N$ が存在して $C_j \subseteq B_i$ となることである. この状態を $B \le C$ と書くと, 細分全体の集合には半順序構造が入る. さてインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ を一つ固定すると, 調和積の定義より $\{1, \ldots, r\}$ の任意の分割 $C = (C_1, \ldots, C_M)$ に対し

$$(c_1) * \cdots * (c_M) = \sum_{B=\{B_1,\ldots,B_N\} \le C} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(N)})$$

が成り立つ (ここで $b_i = \sum_{j \in B_i} k_j$, $c_i = \sum_{j \in C_i} k_j$ とおいた.). これに Möbius の反転公式を適用することで

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_M} (c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(N)}) = \sum_{B=\{B_1,\ldots,B_N\} \le C} \mu(B, C) (b_1) * \cdots * (b_N)$$

となり, $C = \{\{1\}, \ldots, \{r\}\}$ ととれば $\mu(B, C) = (-1)^{r-N} (b_1-1)! \cdots (b_N-1)!$ であることから示したい等式が得られた. 二つ目の等式は一つ目の両辺に S^* (命題 1.3.5 で定義したもの) を適用することで, この写像が調和積に関して準同型であることからわかる. □

[4]非常にややこしいが, Jarossay [J3, Definition 4.5] は調和積のことを quasi-shuffle product と呼んでいる.

1.4. **シャッフル積.** この小節では, 多重ゼータ値を扱うにあたってもう一つの大事な積構造であるシャッフル積について基本的な性質を述べる. 調和積とよく似た性質が多く (実際に Hoffman の quasi-shuffle product を通じて同時に証明できる命題も数多くある), 以後 "調和積と同様" というフレーズが多く登場するがご宥恕願いたい.

定義 1.4.1 (Eilenberg–Mac-Lane [EM])**.** シャッフル積 (*shuffle product*) を $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$ 双線型な積 ш として, 次の規則で帰納的に定める:

$$1 \,\text{ш}\, w = w \,\text{ш}\, 1 = w,$$
$$we_i \,\text{ш}\, w'e_j = (we_i \,\text{ш}\, w')e_j + (w \,\text{ш}\, w'e_j)e_i.$$

ここで $w, w' \in \mathfrak{H}$ であり $i, j \in \{0,1\}$ とした.

重さごとに帰納的に計算していくことで, 次の事実がわかる.

命題 1.4.2. 積 ш は結合的かつ可換である.

調和積と同様[5], ш を備えた Hoffman 代数をそれぞれ $\mathfrak{H}_{\text{ш}}, \mathfrak{H}^1_{\text{ш}}, \mathfrak{H}^0_{\text{ш}}$ と書く. インデックスの線型和として $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ という記号を用いたのと同様, シャッフル積においても $\mathbf{k} \,\text{ш}\, \mathbf{l}$ のような記号を用いる. たとえば

$$(1,2) \,\text{ш}\, (2) = 6(1,4) + 3(2,3) + (3,2) \in \mathcal{R}_0$$

となる.

命題 1.4.3 (Reutenauer [Re, Theorem 6.1])**.** 同型 $\mathfrak{H}^1_{\text{ш}} \simeq \mathfrak{H}^0_{\text{ш}}[e_1]$ が成り立つ. 即ち任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対しある非負整数 n と $\mathfrak{H}^0$ の元 $w_0, \dots, w_n$ が存在し

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i \,\text{ш}\, e_1^{\text{ш} i}$$

となる. ただし $e_1^{\text{ш} i}$ という記号は調和積のときと同様 i 個の e_1 のシャッフル積を意味する.

この表示による定数項 w_0 をしばしば $\mathrm{reg}_{\text{ш}}(w)$ と書く. 次の事実も調和積と同様である.

命題 1.4.4 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Corollary 5])**.** 任意の $w \in \mathfrak{H}^0$ と非負整数 n に対し

$$we_1^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{reg}_{\text{ш}}(we_1^{n-i}) \,\text{ш}\, \frac{e_1^{\text{ш} i}}{i!}$$

が成り立つ.

Proof. 実際はより強く, $W \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$we_0e_1^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}((w \,\text{ш}\, e_1^{n-i})e_0) \,\text{ш}\, e_1^i$$

となることを n の帰納法で示す (ここから命題が従うことは正整数 N に対し $e_1^{\text{ш} N} = N! e_1^N$ が成り立つことからわかる.). $n=0$ のときは明らかで, $n-1$ のケースを仮定すると

$$\begin{aligned} we_0e_1^n &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\big(((w \,\text{ш}\, e_1^{n-i})e_0) \,\text{ш}\, e_1^{i-1}\big)e_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\big(((w \,\text{ш}\, e_1^{n-i})e_0) \,\text{ш}\, e_1^{i} - (w \,\text{ш}\, e_1^{n-i} \,\text{ш}\, e_1^i)e_0\big) \end{aligned}$$

と計算できる (二つ目の等号はシャッフル積の定義と $i=0$ の項が 0 となることを用いた.). 二つ目の和は

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}(w \,\text{ш}\, e_1^{n-i} \,\text{ш}\, e_1^i)e_0 = \left(\frac{w}{n!} \,\text{ш}\, \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\right)e_1^n\right)e_0 = 0$$

となるため命題を得る. □

[5] 調和積の場合と違って $\mathfrak{H}$ 全体, つまり e_0 で始まる word も含めた定義を勘定に入れていることは後々の正規化や KZ 結合子の議論などで大事になってくる.

命題 1.4.5 (Li [L1, Lemma 3.3]). 正整数 k, r $(k > r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \mathrm{reg}_{ш}(z_{\mathbf{k}}) = (-1)^{r-1}e_1^r e_0^{k-r}$$

が成り立つ.

命題 1.4.6 (Hopf 代数構造; Sweedler [Sw, Chapter XII]). 標数 0 の体 $\mathbb{K}$ に対し $\mathfrak{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}\langle e_0, e_1\rangle$ と書くと, これには次のようにして $\mathbb{K}$ 上の Hopf 代数構造が入る.

(1) 積はシャッフル積 ш を $\mathbb{K}$ 双線型にしたものである (定義 1.4.1 で $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{K}$ に変える.).
(2) 単位射は埋め込み $\eta\colon \mathbb{K} \ni a \mapsto a \in \mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ である.
(3) 余積は word $w = e_{a_1}\cdots e_{a_n}$ $(a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\})$ に対し

$$\Delta^{ш}(w) = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i} e_{a_j}\right)\otimes\left(\prod_{j=i+1}^{n} e_{a_j}\right)$$

として定まる $\mathbb{K}$ 線型写像 $\Delta^{ш}\colon \mathfrak{H}_{\mathbb{K}} \mapsto \mathfrak{H}_{\mathbb{K}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ である.
(4) 余単位射は $\mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ の元を e_0, e_1 の多項式と見たときの定数項を与える写像 ϵ である.
(5) 対蹠射は

$$S^{ш}(w) = (-1)^{\mathrm{wt}(w)}\overleftarrow{w}$$

として定まる $\mathbb{K}$ 線型写像 $S^{ш}\colon \mathfrak{H}_{\mathbb{K}} \to \mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ である. 言い換えると $S^{ш}$ は $e_i \mapsto -e_i$ $(i \in \{0,1\})$ から定まる $\mathbb{K}$ 代数の反自己同型である.

とくに $\mathfrak{H}$ は $\mathbb{Q}$ 上の Hopf 代数となる.

命題 1.4.6 で構築した Hopf 代数の双対を取ることで, 結合子の理論でよく現れる冪級数環の完備 Hopf 代数構造がわかる.

命題 1.4.7 (Gil–Fresán [GF, Example 3.67]). 標数 0 の体 $\mathbb{K}$ に対し $\widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ と書くと, これには次のようにして $\mathbb{K}$ 上の Hopf 代数構造が入る.

(1) 積は通常の concatenation 積 $(w \otimes w' \mapsto ww')$ である.
(2) 単位射は埋め込み $\eta\colon \mathbb{K} \ni a \mapsto a \in \widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}}$ である.
(3) 余積は $i \in \{0,1\}$ に対し

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$$

で与えられる $\mathbb{K}$ 代数準同型 $\Delta\colon \widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}} \to \widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}}\widehat{\otimes}\widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}}$ である.
(4) 余単位射は $\widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}}$ の元を e_0, e_1 の冪級数と見たときの定数項を与える写像 ϵ である.
(5) 対蹠射は $e_i \mapsto -e_i$ $(i \in \{0,1\})$ から定まる連続な反自己同型 $S^{ш}\colon \widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}} \to \widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{K}}$ である.

とくに $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ は $\mathbb{C}$ 上の完備 Hopf 代数となる.

2. 多重ゼータ値

2.1. 定義と主予想.

定義 2.1.1. 空でない許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し収束する級数

$$\zeta(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

を多重ゼータ値 (*multiple zeta value, MZV*) と呼ぶ. また, $\zeta(\varnothing) = 1$ とおく.

収束することの証明は本旨ではないので省略する. 多重ゼータ値とは許容インデックス $\mathbf{k}$ に対して定まる量であるから, $\mathrm{dep}(\mathbf{k})$ や $\mathrm{wt}(\mathbf{k})$, $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ の情報を指して $\zeta(\mathbf{k})$ の深さや重さ, 高さということがある[6]. たとえば深さ 1 の多重ゼータ値とはよく知られた Riemann ゼータ関数の特殊値

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \qquad (k \geq 2)$$

[6] しかし, 後に述べるように $\zeta(3) = \zeta(1,2)$ など異なる深さを持つ多重ゼータ値の間に等式が成り立つケースがあるため, 多重ゼータ値に対して深さを返す写像は well-defined でない: たとえば実数 $\zeta(3)$ の深さが 1 であるというのは適切でない. ゆえに, 深さ r, 重さ k, 高さ s の多重ゼータ値とは単に $\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in I_0(k,r,s)\}$ の元のことを指す.

である.

多重ゼータ値の研究におけるもっとも大きな未解決問題のひとつは Zagier の “次元予想” である. その主張をここに述べておく: 2 以上の整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_k \coloneqq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k,\ \mathbf{k} \in \mathcal{I}'_0\}$$

とおき, $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$ と定めておく. 非負整数 k に対し $\mathcal{Z}_k$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての次元を d_k と書く.

予想 2.1.2 (次元予想; Zagier [Za1])**.** 形式的冪級数としての等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

が成り立つであろう. 言い換えると, $d_0 = d_2 = 1$, $d_1 = 0$ であり $k \geq 3$ に対し漸化式

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$

が成り立つであろう.

モチーフを用いた数論幾何的な議論によって, 次元予想の片側の不等式は証明されている:

定理 2.1.3 (Goncharov [Go2], Deligne–Goncharov [DG], Terasoma [Te])**.** 数列 $\{d'_k\}_{k\geq 0}$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty} d'_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

と定めると任意の $k \geq 0$ に対し $d_k \leq d'_k$ が成り立つ.

予想次元 d'_k が概ね $(1-t^2-t^3\ \text{の実根})^k = (1.3247\ldots)^k$ のオーダーである一方, 重さ k の許容インデックスが 2^{k-2} 個あることを考えると, 定理 2.1.3 は多重ゼータ値の間に $\mathbb{Q}$ 線型関係式がたくさんあることを示唆している. 実際, 多重ゼータ値の間に成り立つ関係式は今までに数多く見つかっており, この分野の研究の中核をなしている. 次小節以降では, そのような関係式たちについて詳細に述べていく. なお, 異なる重さの多重ゼータ値には関係式がないと予想されている:

予想 2.1.4. すべての多重ゼータ値が $\mathbb{Q}$ 上生成する代数 $\mathcal{Z} = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathcal{I}'_0\}$ は直和分解

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k$$

を持つであろう.

2.2. **積分表示.** 多重ゼータ値は反復積分による表示を持つ. この事実は後述するシャッフル関係式や結合子の理論などに深く関連しており, 明らかながらも非常に重要な事実である.

非負整数 n と $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ ($a_0 \neq a_1$, $a_n \neq a_{n+1}$, $a_0 < a_{n+1}$) に対し

$$I(a_0; a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}) \coloneqq \int_{a_0 < t_1 < \cdots < t_n < a_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{dt_i}{t_i - a_i}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

定理 2.2.1 (Kontsevich [Ho2, Theorem 6.1])**.** 許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} I(0; 1, \{0\}^{k_1-1}, \ldots, 1, \{0\}^{k_r-1}; 1)$$

が成り立つ. ここで $\{X\}^N$ は X を N 個並べたものを表す.

この積分表示を通じて, 多重ゼータ値を Hoffman 代数によって取り扱う枠組みをここで述べておく.

定義 2.2.2. $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を word $w = e_{a_1} \cdots e_{a_n}$ ($a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$, $a_1 = 1$, $a_n = 0$) に対し

$$w \mapsto (-1)^{\mathrm{dep}(w)} I(0; a_1, \ldots, a_n; 1)$$

から定める. この写像をしばしば *evaluation map* と呼ぶ.

このとき定理 2.2.1 より許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し $Z(z_{\mathbf{k}})=\zeta(\mathbf{k})$ が成り立つ．この表示を利用して $\mathcal{R}'_0$ の元に対し写像 ζ を $\mathbb{Q}$ 線型に拡張しておく: 即ち, 有理数 $q_1,\dots,q_n$ と許容インデックス $\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n$ に対し

$$\zeta\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\mathbf{k}_i\right) \coloneqq Z\left(\sum_{i=1}^{n} q_i z_{\mathbf{k}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i\zeta(\mathbf{k}_i)$$

と定める．この写像を用いると, 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 線型関係式とは $\mathrm{Ker}(Z)$ (あるいは $\mathrm{Ker}(\zeta)$) の元を明示的に書き下したものに他ならないことが分かる．また, 今後も同様にインデックスを変数に持つ写像を (必要なら $\varnothing \mapsto 1$ と定めて) 線型に拡張することがある.

2.3. **多重ゼータ値の関係式族.** 本小節では, 多重ゼータ値の関係式族についてよく知られているものをいくつか述べていく．単なる特殊値を計算したものとの明確な線引きは難しいが, 分類の難しいものは最後にまとめて記載した.

2.3.1. 双対性．反復積分表示 (定理 2.2.1) からわかる大事な定理の一つとして, 双対性 (*duality*) や双対関係式 (*duality relation*) と呼ばれる関係式がある．それを述べるにあたって許容インデックスの双対という概念を定義する.

定義 2.3.1. 許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し $s=\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ とすると

$$\mathbf{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_s-1},b_s+1)$$

を満たす正整数 $a_1,b_1,\dots,a_s,b_s$ が一意に存在する．これを用いて定まる許容インデックス

$$\mathbf{k}^\dagger=(\{1\}^{b_s-1},a_s+1,\dots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)$$

を $\mathbf{k}$ の双対インデックス (*dual index*) という.

注意 2.3.2. この定義は Hoffman 代数を用いるとより簡潔に述べられる: $\mathfrak{H}^0$ の反自己同型 τ を $e_i\mapsto e_{1-i}$ $(i\in\{0,1\})$ で定めると, word $\tau(z_{\mathbf{k}})$ に対応する許容インデックスが $\mathbf{k}^\dagger$ となる.

定理 2.3.3 (双対性; Hoffman [Ho2, Corollary 6.2])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}^\dagger)$$

が成り立つ.

Proof. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r),\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し

$$Z(\mathbf{k};\mathbf{l}) \coloneqq \sum_{\substack{0=m_0<m_1<\cdots<m_r\\ 0=n_0<n_1<\cdots<n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\frac{m_r!n_s!}{(m_r+n_s)!}\frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

と定める．この級数は $\mathbf{k},\mathbf{l}$ が両方空でないか, 片方が空でもう片方が許容的なとき収束する．このとき非負整数 m,n に対し

$$\sum_{a>m}\frac{1}{a}\frac{a!n!}{(a+n)!}=\frac{1}{n}\frac{m!n!}{(m+n)!}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{k}_{\rightarrow};\mathbf{l}) &= Z(\mathbf{k};\mathbf{l}_{\uparrow}) \qquad (\mathbf{l}\neq\varnothing),\\ Z(\mathbf{k}_{\uparrow};\mathbf{l}) &= Z(\mathbf{k};\mathbf{l}_{\rightarrow}) \qquad (\mathbf{k}\neq\varnothing)\end{aligned}$$

となる．許容インデックス $\mathbf{k}$ に対しこれらの関係式を $Z(\mathbf{k};\varnothing)$ へ繰り返し適用することで定理を得る. □

注意 2.3.4. 双対性は反復積分表示において変数変換 $t\mapsto 1-t$ を施すことですぐにわかるが, ここでは Seki–Yamamoto [SY1] による連結和法 (*connected sum method*) と呼ばれる証明を紹介した．この手法は様々な関係式の証明に応用されており, 調和関係式 (定理 2.3.35), シャッフル関係式 (定理 2.3.37), Hoffman 関係式 (注意 2.3.21), 巡回和公式 (定理 2.3.31) は Seki [Se4] で再証明されているほか, 多重ゼータ値の変種に対する応用も Seki–Yamamoto [SY2] (q-多重調和和の双対性), Hirose–Sato–Seki [HSS] (q-多重ゼータ値の二重 Ohno 関係式), Yamamoto [Y5] (一変数多重ポリログ関数の双対性), Murahara–Onozuka [MOnoz2] (パラメータ付き Ohno 関係式), Kawamura–Measaka–Seki [KMS] (多変数多重ポリログ関数の fundamental identity) でなされている.

2.3.2. 和公式. 後々のために, Bernoulli 数 B_n $(n \geq 1)$ を

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

によって定義しておく[7]. 3 以上の奇数 n に対し $B_n = 0$ となることに注意する.

命題 2.3.5 (Faulhaber の公式)**.** 正整数 n, k に対し

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

が成り立つ.

§1 で述べたように, $I_0(k,r)$ とは重さ k, 深さ r の許容インデックス全体の集合である.

定理 2.3.6 (和公式; Granville [Gr, Proposition], Zagier [AK, p. 18], Ochiai [AK, p. 19])**.** 正整数 k, r $(k > r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,r)} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k)$$

が成り立つ.

和公式には様々な変種がある. 以下の二つは "Kaneko–Sakata sum formula" と呼ばれる[8]系列の定理であり, 高さを固定した和が特徴である.

定理 2.3.7 (Murahara–Sakata [MS, Theorem 1.2])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と整数 $h \geq r$ に対し

$$\sum_{(l_1,\ldots,l_r) \in I(h,r)} \zeta(\{1\}^{l_1-1}, k_1+1, \ldots, \{1\}^{l_r-1}, k_r+1) = \sum_{i=0}^{h} \sum_{\substack{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{i} \\ \mathbf{k} \preceq \mathbf{l}}} \sum_{\mathbf{h} \in I(h,i)} (-1)^{i-r} \zeta(\mathbf{l} \oplus \mathbf{h})$$

が成り立つ.

系 2.3.8 (Kaneko–Sakata [KS, Theorem 1.1])**.** 正整数 k, r に対し

$$\zeta(\{1\}^{r-1}, k+1) = \sum_{j=1}^{\min\{r,k\}} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in I(k,j) \\ \mathbf{l} \in I(r,j)}} \zeta(\mathbf{k} \oplus \mathbf{l})$$

が成り立つ.

次に述べるのは制限付き和公式 (*restricted sum formula*), 重み付き和公式 (*weighted sum formula*) と呼ばれる関係式たちである. 同じ名称で様々な定理が知られている.

定理 2.3.9 (一般化制限付き和公式; Murahara–Murakami [MM, Theorem 1.1], Eie [Ei, Theorem 3.4.1])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と非負整数 h に対し

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_r) \in I(r+h,r)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{\mathbf{h}_i \in I(k_i+l_i-1,l_i)} \zeta(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{r-1}, (\mathbf{h}_r)_{\uparrow}) \\ &= \sum_{i=0}^{h} \sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1,\ldots,e_{r-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h-i}} \sum_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{h+r-i} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=i}} \zeta((k_1, \{1\}^{e_1}, \ldots, k_{r-1}, \{1\}^{e_{r-1}}, k_r+1) \oplus \mathbf{f}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

---

[7]よく知られているように, Bernoulli 数の定義には B_1 の符号の取り方のみで区別される二種類の流儀がある. 本稿では $B_1 = 1/2$ を用いたが, とくにこだわりのあるチョイスという訳ではない: 多重 Bernoulli 数の文脈などになるとこの違いに基づく現象もいくつかあるが, 現状本稿における記述で B_1 の正負が本質的な問題になることはない.

[8]名称は Hirose [Hi2] による.

系 2.3.10 (Eie–Liaw–Ong [ELO1, Main Theorem]). 非負整数 h と正整数 k,r $(k>r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r)}\zeta(\{1\}^h,\mathbf{k})=\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I(k+h,h+1)\\ k_r>k-r}}\zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ.

定理 2.3.11 (Gangl–Kaneko–Zagier [GKZ, Theorem 1]). 整数 $N\geq 2$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N-1}\zeta(2i,2N-2i)=\frac{3}{4}\zeta(2N),\qquad \sum_{i=1}^{N-1}\zeta(2i-1,2N-2i+1)=\frac{1}{4}\zeta(2N)$$

が成り立つ.

定理 2.3.12 (Machide [Mac1, Theorem 1.1]). 正整数 N に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\zeta(6i-2,6N-6i+4)=\frac{1}{6}\zeta(6N+2)-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N}\zeta(2i-1,6N-2i+3),\\
&\sum_{i=1}^{N}\zeta(6i-5,6N-6i+4)=\frac{1}{6}\zeta(6N-1)-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N}\zeta(2i-1,6N-2i),\\
&\sum_{i=1}^{N}(\zeta(6i-3,6N-6i+3)-\zeta(6i-4,6N-6i+4)-\zeta(6i-5,6N-6i+5))\\
&=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N-1}\zeta(2i-1,6N-2i+1),\\
&\sum_{i=1}^{N}(\zeta(6i-2,6N-6i+3)+\zeta(6i-3,6N-6i+4)-\zeta(6i-4,6N-6i+5)),\\
&\qquad=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N}\zeta(2i-1,6N-2i+2),\\
&\sum_{i=1}^{N-1}(\zeta(6i,6N-6i-3)-\zeta(6i-1,6N-6i-2)-\zeta(6i-2,6N-6i-1))\\
&\qquad=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N-3}\zeta(2i,6N-2i-3),\\
&\sum_{i=1}^{N-1}(\zeta(6i+1,6N-6i-3)+\zeta(6i,6N-6i-2)-\zeta(6i-1,6N-6i-1))\\
&\qquad=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3N-2}\zeta(2i,6N-2i-2)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 2.3.13 (Komori–Matsumoto–Tsumura [KMT2, Theorem 7.1], Chen–Chung–Eie [CCE, Theorem A], Li–Qin [LQ2, Theorem 3.26]). 正整数 k,r,a $(k\geq r,\ a\geq 2)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I_0(k,r)}\zeta(ak_1,\dots,ak_r)=\sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\binom{r+i}{r}\zeta(\{a\}^i)\zeta^\star(\{a\}^{r-i})$$

が成り立つ.

系 2.3.14 (Hoffman [Ho5, Theorem 1]). 正整数 k,r $(k\geq r\geq 1)$ に対し

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in I(k,r)}\zeta(2k_1,\dots,2k_r)=\frac{1}{2^{2(r-1)}}\binom{2r-1}{r}\zeta(2k)$$

$$-\sum_{i=1}^{\lfloor (r-1)/2\rfloor}\frac{1}{2^{2r-3}(2i+1)B_{2i}}\binom{2r-2i-1}{r}\zeta(2i)\zeta(2k-2i).$$

が成り立つ.

系 2.3.15 (Yuan–Zhao [YZ, Theorem 1.1]). 正整数 k,r $(k\geq r\geq 3)$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{(k_1,\dots,k_r)\in I(k,r)}\zeta(4k_1,\dots,4k_r)&=\sum_{i=0}^{\lfloor (r-1)/2\rfloor}\sum_{j=0}^{2i+1}\frac{(-1)^{\lfloor i/2\rfloor+j+r}2^{i+2}}{(2i+1)!}\binom{2i+1}{j}\binom{(j-2)/4}{r}\zeta(4k-2i)\pi^{2i}\\&+\sum_{i=0}^{\lfloor (r-2)/4\rfloor}\sum_{j=0}^{4i+2}\frac{(-1)^{k+j+r}2^{2i+4}}{(4i+2)!}\binom{4i+2}{j}\binom{(j-2)/4}{r}\\&\cdot\left(\sum_{u=0}^{k-i-1}\zeta(4u)\zeta(4k-4i-4u)-(k-1)\zeta(4k)-\frac{7}{4}\zeta(4k-4i)\right)\pi^{4i}\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 2.3.16 (Nakamura [N, Theorem 1.1, Theorem 1.2]). 正整数 $N\geq 2$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N-1}(4^i+4^{N-i})\zeta(2i,2N-2i)=\left(N+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}4^{N-1}\right)\zeta(2N)$$

が成り立ち, $N\geq 4$ なら

$$\sum_{i=2}^{N-2}(2i-1)(2N-2i-1)\zeta(2i,2N-2i)=\frac{3}{4}(N-3)\zeta(2N)$$

が成り立つ.

定理 2.3.17 (Guo–Xie [GX, Theorem 1.1]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$D(\mathbf{k})\coloneqq 2^{k_r-1}+(2^{k_r-1}-1)\sum_{i=0}^{r-2}2^{\delta_{i,0}+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{[i]})-k_r-r+i+1}$$

とおく. このとき正整数 k,r $(k>r\geq 2)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I_0(k,r)}D(k_2,\dots,k_r)\zeta(\mathbf{k})=k\zeta(k)$$

が成り立つ.

定理 2.3.18 (Eie–Liaw–Ong [ELO2, Main Theorem]). 正整数 k,r $(k\geq 2r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_{2r})\in I(k,2r)}\sum_{j=1}^{r}2^{k_{2j}}\zeta(\mathbf{k}_{\uparrow})=\frac{1}{2}(k+2r)\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

系 2.3.19 (Ohno–Zudilin [OZu, Theorem 3]). 整数 $k\geq 3$ に対し

$$\sum_{i=1}^{k-2}2^{k-i}\zeta(i,k-i)=(k+1)\zeta(k)$$

が成り立つ.

また, 記述量が膨大になるので詳細は述べないが, Kadota [Kad] では Eie–Liaw–Ong の重み付き和公式 (定理 2.3.18) のパラメータ付き一般化がなされている.

2.3.3. *Ohno* 関係式. 双対性 (定理 2.3.3) と和公式 (定理 2.3.6) を同時に含む一般化を Ohno [Oh] が発見している. 非負整数 h と許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し大野和 (*Ohno sum*) を

$$O_h(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}} \zeta(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})$$

と定める.

定理 2.3.20 (Ohno 関係式; Ohno [Oh, Theorem 1])**.** 非負整数 h と許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$O_h(\mathbf{k}) = O_h(\mathbf{k}^\dagger)$$

が成り立つ.

注意 2.3.21. Ohno 関係式において $h=0$ とおくと双対関係式が得られ, $h=k-r-1$, $\mathbf{k}=(\{1\}^{r-1},2)$ とおくと和公式が得られる. また, $h=1$ のケースに双対性を適用した等式

$$\sum_{i=1}^{r}\zeta(\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1,\mathbf{k}^{[i]}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(\mathbf{k}_{[i-1]},j+1,k_i-j,\mathbf{k}^{[i]})$$

は Ohno 関係式以前[9]に Hoffman [Ho1, Theorem 5.1] によって得られており, Hoffman 関係式と呼ばれる.

注意 2.3.22. 非負整数 h に対し $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\sigma_h\colon\mathfrak{H}^0\to\mathfrak{H}^0$ を

$$\sigma_h(z_{\mathbf{k}}) = \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}} z_{\mathbf{k}\oplus\mathbf{e}}$$

とおくとこれは Ohno 和に対応する写像となり (i.e., $\sigma_h(z_{\mathbf{k}})=O_h(\mathbf{k})$), ゆえに Ohno 関係式は任意の非負整数 h と $w\in\mathfrak{H}^0$ に対し

$$Z(\sigma_h(\tau(w))) = Z(\sigma_h(w))$$

が成り立つことと同値になる.

インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ を

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1+\cdots+1}_{k_1},\dots,\underbrace{1+\cdots+1}_{k_r})$$

と表示したときにコンマ ‘,’ とプラス ‘+’ を入れ替えて得られるインデックスを $\mathbf{k}$ の Hoffman 双対インデックス (*Hoffman dual index*) といい, $\mathbf{k}^\vee$ で表す. Hoffman 代数の言葉で述べれば, $e_i\mapsto e_{1-i}$ で定まる $\mathfrak{H}$ の自己同型を $\tilde{\tau}$ と書けば

$$z_{\mathbf{k}^\vee} = e_1\tilde{\tau}(e_0^{k_1-1}e_1\cdots e_1e_0^{k_r-1})$$

で特徴づけられるインデックス $\mathbf{k}^\vee$ が $\mathbf{k}$ の Hoffman 双対インデックスである. 便宜上 $\varnothing^\vee\coloneqq\varnothing$ としておく.

定理 2.3.23 (Ohno 型関係式; Horikawa–Murahara–Oyama [HoMuOy, Theorem 2.5])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}} \zeta((\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})_\uparrow) = \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{s} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}} \zeta(((\mathbf{k}^\vee\oplus\mathbf{e})^\vee)_\uparrow)$$

が成り立つ.

許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$O^t(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(n_i-t)n_i^{k_i-1}} \in \mathbb{R}[\![t]\!]$$

とおく. また, インデックスの成分単位のシャッフル積を $\widetilde{ш}$ と書く: つまり $w,w'\in\mathfrak{H}^1$ と正整数 k, l に対し

$$w\,\widetilde{ш}\,1 = 1\,\widetilde{ш}\,w = w,$$
$$wz_k\,\widetilde{ш}\,w'z_l = (wz_k\,\widetilde{ш}\,w')z_l + (w\,\widetilde{ш}\,w'z_l)z_k$$

[9] Ohno 関係式どころか双対性よりも前であるが, 同論文では双対性が “duality conjecture” として明示的な形で予想が記載されている.

として $\mathfrak{H}^1$ 上に $\mathbb{Q}$ 双線型な積 $\widetilde{\text{ш}}$ を入れ, word とインデックスの対応によって $\widetilde{\text{ш}}$ を $\mathcal{R}_0$ 上の積だと思うことにする. 許容インデックス $\mathbf{k}$ と整数 $N \geq 2$ に対し

$$F(N;\mathbf{k}) \coloneqq O^t((N) \mathbin{\widetilde{\text{ш}}} \mathbf{k}) - O^t((N) \mathbin{\widetilde{\text{ш}}} \mathbf{k}^\dagger)$$

とおく.

定理 2.3.24 (Murahara [Murah3, Theorem 1.4])**.** 整数 $M, N \geq 0$, $l \geq 0$ に対し

$$F(M;(N+1) \mathbin{\widetilde{\text{ш}}} \{2\}^l) = F(N;(M+1) \mathbin{\widetilde{\text{ш}}} \{2\}^l)$$

が成り立つ.

定理 2.3.25 (二重 Ohno 関係式; Hirose–Murahara–Onozuka–Sato [HMOS, Theorem 1.4])**.** 非負整数 k_1, n_1, ..., n_{2k_1+1} に対し

$$\mathbf{k} = (\{2\}^{n_1}, 1, \{2\}^{n_2}, 3, \dots, \{2\}^{n_{2k_1-1}}, 1, \{2\}^{n_{2k_1}}, 3, \{2\}^{n_{2k_1+1}})$$

とおき, $r = \mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s = \mathrm{wt}(\mathbf{k}) - r (= \mathrm{wt}(\mathbf{k}^\dagger))$ と書く. このとき非負整数 h_1, h_2 に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h_1 \\ \mathbf{f} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{f}) = h_2}} \zeta(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e} \oplus \mathbf{f}) = \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h_1 \\ \mathbf{f} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \\ \mathrm{wt}(\mathbf{f}) = h_2}} \zeta(\mathbf{k}^\dagger \oplus \mathbf{e} \oplus \mathbf{f})$$

が成り立つ.

$\mathfrak{H}[\![\lambda]\!]$ の部分環 A を $e_0, e_1, \lambda, (1+e_1e_0\lambda)^{-1}$ で生成されるものとし, A 上の反自己同型 τ_λ を

$$e_0 \mapsto (1+e_1e_0\lambda)^{-1}e_1, \qquad e_1 \mapsto e_0(1+e_1e_0\lambda), \qquad \lambda \mapsto \lambda$$

により定める. また, 許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対し

$$\mathcal{O}^{\xi,\eta}(z_{\mathbf{k}}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \prod_{i=1}^r \frac{1}{(n_i-\xi)(n_i-\eta)n_i^{k_i-2}}$$

とおくことで $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\mathcal{O}\colon \mathfrak{H}^0 \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}[\![s,t]\!]$ を定め, A の元 $w = \sum_{n\geq 0} w_\lambda^n$ に対し

$$\mathcal{O}(e_1we_0) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \mathcal{O}(e_1w_ne_0)\xi^n\eta^n$$

とする.

定理 2.3.26 (Extended double Ohno relation; Hirose–Sato–Seki [HSS, Theorem 1.2])**.** 任意の $w \in A$ に対し $\mathcal{O}(e_1we_0) = \mathcal{O}(e_1\tau_\lambda(w)e_0)$ が成り立つ.

2.3.4. 導分関係式. ここで "導分" という言葉を簡単に復習しておく. $\mathbb{Q}$ 代数 R の導分とは $\mathbb{Q}$ 線型写像 $d\colon R \to R$ であって, 任意の w, $w' \in R$ に対し

$$d(ww') = d(w)w' + wd(w')$$

を満たすものである. さて正整数 h に対し $\mathfrak{H}$ 上の導分 ∂_h を $e_i \mapsto (-1)^i e_1(e_0+e_1)^{h-1}e_0$ $(i \in \{0,1\})$ から定めると, 次の定理が成り立つ.

定理 2.3.27 (導分関係式; Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Corollary 6])**.** 任意の $W \in \mathfrak{H}^0$ と正整数 h に対し $Z(\partial_h(W)) = 0$ である.

注意 2.3.28. Ohno 関係式に双対性を適用した等式

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} \zeta(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\dagger)} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} \zeta((\mathbf{k}^\dagger \oplus \mathbf{e})^\dagger)$$

はときどき弱 Ohno 関係式 (*weak Ohno relation*) と呼ばれることがあるが, 導分関係式と弱 Ohno 関係式は同値であることが Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Theorem 3 (iii)] で示されている. また, Horikawa–Murahara–Oyama [HoMuOy, Theorem 2.6] によって, これらと Ohno 型関係式 (定理 2.3.23) が同値であることもわかっている. Murahara–Murakami [MM, Theorem 3.3] は Ohno 型関係式と一般化制限付き和公式 (定理 2.3.9) が同値であることを示しているが, これの部分的な結果が Tanaka [Tan3, Theorem 2.1] によって先立って示されている: 定理 2.3.9 の系である Eie–Liaw–Ong の制限付き和公式 (系 2.3.10) は導分関係式に含まれている.

有理数 c に依存した $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\theta\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $w,\, w'\in\mathfrak{H}$ に対し

$$\theta(e_0)=e_0(e_0+e_1),\qquad \theta(e_1)=e_1(e_0+e_1),$$
$$\theta(ww')=\theta(w)w'+w\theta(w')+\mathrm{wt}(w)cw\partial_1(w')$$

によって定める[10]. また, $\mathrm{ad}(\theta)$ を随伴作用素 $\partial\mapsto\theta\partial-\partial\theta$ とし, 正整数 h と有理数 c に対し $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\partial_h^{(c)}\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を

$$\partial_h^{(c)}\coloneqq\frac{1}{(h-1)!}\,\mathrm{ad}(\theta)^{h-1}(\partial_1)$$

と定める.

定理 2.3.29 (一般導分関係式; Tanaka [Tan2, Theorem 1.3]). 任意の $w\in\mathfrak{H}^0$ と正整数 h, 有理数 c に対し $Z(\partial_h^{(c)}(w))=0$ が成り立つ.

Kaneko–Murahara–Murakami [KMM] によって, quasi-derivation operator $\partial_h^{(c)}$ の異なった解釈が与えられている: $\mathfrak{H}$ 上の自己同型 ϕ を $e_0\mapsto e_0+e_1$ と $e_1\mapsto -e_1$ から定め, $w,\, w'\in\mathfrak{H}$ に対し $w\diamond w'\coloneqq\phi(\phi(w)*\phi(w'))$ とおく. また, 有理数 c ごとに決まる写像 $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}^{(c)}\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $w\in\mathfrak{H}$ に対し

$$\tilde{\theta}(w)\coloneqq\theta(w)+\mathrm{wt}(w)cwe_1$$

で定め, 正整数 h に対し

$$q_h^{(c)}\coloneqq\frac{1}{(h-1)!}\tilde{\theta}^{h-1}(e_1)$$

とおく.

定理 2.3.30 (Kaneko–Murahara–Murakami [KMM, Theorem 2.2]). 任意の $w\in\mathfrak{H}$ と正整数 h, 有理数 c に対し

$$\partial_n^{(c)}(we_0)=(w\diamond q_h^{(c)})e_0$$

が成り立つ.

2.3.5. 巡回和公式.

定理 2.3.31 (巡回和公式; Hoffman–Ohno [HO, Cyclic sum theorem]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i-j)=\sum_{i=1}^{r}\zeta(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1)$$

が成り立つ.

巡回和公式は Hoffman 関係式 (注意 2.3.21) とよく似た見た目であるが, Hoffman 関係式が導分関係式 (と同値な弱 Ohno 関係式) の $h=1$ のケースであったように, 巡回和公式も “巡回導分” による関係式の $h=1$ のケースであるとみなすことができる. $\mathfrak{H}$ の部分集合を定義域に持つ写像 f に対し $\overline{f}\coloneqq\tau\circ f\circ\tau$ とおく (τ は注意 2.3.2 で定義した反自己同型).

定義 2.3.32 (巡回導分; Rota–Sagan–Stein [RSS]). 体 K と K 代数 R に対し, R 上の巡回導分 (*cyclic derivation*) とは, K 線型写像 $\psi\colon R\to\mathrm{End}\,R$ であって $w,\, w_1,\, w_2\in R$ に対し

$$\psi(w_1w_2)(w)=\psi(w_1)(w_2w)+\psi(w_2)(ww_1)$$

を満たすものである.

$\mathfrak{H}$ 上の巡回導分 C を $C(e_0)(w)=0,\, C(e_1)(w)=e_1we_0$ $(w\in\mathfrak{H})$ で定めると, 簡単な計算により巡回和公式は

$$Z(\overline{C(w)}(1))=Z(C(w)(1))\qquad(w\in\check{\mathfrak{H}}^1)$$

と書ける. ここで

$$\check{\mathfrak{H}}^1\coloneqq\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{z_{\mathbf{k}}\mid\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0,\ \mathbf{k}\neq\{1\}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\}$$

とおいた. 注意 2.3.22 より Hoffman 関係式は

$$Z(\overline{\sigma_1}(w))=Z(\sigma_1(w))\qquad(w\in\mathfrak{H}^0)$$

[10] Kaneko–Murahara–Murakami [KMM, Remark 1.2 (1)] に注意があるが, Tanaka の原論文では θ の定義の見た目が異なっている.

と書けることを思い出すとこれらの類似性が見て取れる. Tanaka–Wakabayashi [TW1] がこの観点から巡回和公式を一般化している: 正整数 h に対し, $\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{H}^{\otimes(h+1)}$ への作用[11] $\odot$ を

$$w \odot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{h+1}) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_h \otimes ww_{h+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{h+1}) \odot w = w_1 w \otimes w_2 \cdots \otimes w_{h+1}$$

で定め $(w, w_1, \dots, w_{h+1} \in \mathfrak{H})$, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\mathcal{C}_h \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{h+1}$ を

$$e_0 \mapsto e_1 \otimes (e_0 + e_1)^{\otimes(h-1)} \otimes e_0, \qquad e_1 \mapsto -e_1 \otimes (e_0 + e_1)^{\otimes(h-1)} \otimes e_0,$$
$$\mathcal{C}_h(WW') = \mathcal{C}(W) \odot W' + W \odot \mathcal{C}_h(W')$$

で定める. $\mathcal{C}_h(W)$ のテンソル積を通常の積に差し替えたものを $\rho_h(W)$ と書く. 導分関係式の類似性に注意せよ: もし $\odot$ の定義が

$$(w, w_1 \otimes \cdots \otimes w_{h+1}) \mapsto ww_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{h+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{h+1}, w) \mapsto w_1 \otimes \cdots \otimes w_h \otimes w_{h+1}W$$

であったならば, ρ_h とは導分 ∂_h そのものである.

命題 2.3.33 (Tanaka–Wakabayashi [TW1, Proposition 2.2])**.** 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対し $\rho_1(w) = \overline{C(w)}(1) - C(w)(1)$ が成り立つ.

定理 2.3.34 (Tanaka–Wakabayashi [TW1, Theorem 2.1])**.** 任意の $w \in \check{\mathfrak{H}}^1$ と正整数 h に対し $Z(\rho_n(w)) = 0$ が成り立つ.

命題 2.3.33 より, 定理 2.3.34 は巡回和公式の一般化である.

2.3.6. 複シャッフル関係式. 多重ゼータ値の級数による定義と調和積の定義より調和関係式 (*harmonic relation*, *stuffle relation*) が得られる.

定理 2.3.35 (調和関係式; Hoffman [Ho1, Theorem 4.2])**.** 写像 Z は調和積に関する準同型である: 即ち許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

注意 2.3.36. より一般に, 正整数 N とインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対し多重調和和 (*multiple harmonic sum*) を

$$\zeta_{<M}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r<M} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

で定めると, これに対して調和関係式

$$\zeta_{<M}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{<M}(\mathbf{k})\zeta_{<M}(\mathbf{l})$$

が成り立つ. 双方のインデックスが許容的なときに極限 $M \to \infty$ を計算すれば定理 2.3.35 を得る.

調和関係式と同様, 多重ゼータ値の反復積分表示 (定理 2.2.1) とシャッフル積の定義からシャッフル関係式が得られる. なお, 前述したように Seki [Se4] には連結和法を用いた証明があるほか, Komori–Matsumoto–Tsumura [KMT1] や Goncharov [Go1] でも級数変形による別証明が与えられている.

定理 2.3.37 (シャッフル関係式)**.** 写像 Z はシャッフル積に関する準同型である: 即ち許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k} \mathbin{ш} \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

注意 2.3.38. より一般に, $|z| < 1$ とインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対し多重ポリログ関数 (*multiple polylogarithm*) を

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

で定めると, 定理 2.2.1 と同様にして反復積分表示

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} I(0; 1, \{0\}^{k_1-1}, \dots, 1, \{0\}^{k_r-1}; z)$$

[11] 原論文では $\diamond$ という記号が用いられているが, 定理 2.3.30 で用いた積と重複するので変更した.

が得られるので, これに対してシャッフル関係式

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}ш\mathbf{l}}(z)=\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)\mathrm{Li}_{\mathbf{l}}(z)$$

が成り立つ. 調和関係式と同様, 双方のインデックスが許容的なときに極限 $z\to 1$ を計算すれば定理 2.3.37 を得る.

調和関係式とシャッフル関係式を等置することで多重ゼータ値の線型関係式が得られる. これを複シャッフル関係式 (*double shuffle relation*) と呼ぶ.

定理 2.3.39 (複シャッフル関係式)**.** 許容インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k}*\mathbf{l})=\zeta(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l})$$

が成り立つ.

2.3.7. 正規化. 複シャッフル関係式は数多くの関係式を提供するが, たとえば双対関係式において $\mathbf{k}=(3)$ として得られる $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ という関係式は複シャッフルからは得られない. この問題を克服するために "正規化" (*regularization*) という手続きが Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ] によって導入された. ここではそれを解説する. 以後, 断りなく $\bullet$ と書けば $*$ と $ш$ のいずれかを意味するものとする.

定義 2.3.40 (正規化多項式; Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Proposition 1])**.** 命題 1.3.4, 命題 1.4.4 によって任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対しある非負整数[12] n と $\mathfrak{H}^0$ の元 $w_i^\bullet$ が一意的に存在し

$$z_{\mathbf{k}}=\sum_{i=0}^{n}w_i^\bullet\bullet e_1^{\bullet i}$$

となる. これを用いて

$$\zeta^\bullet(\mathbf{k};T)\coloneqq\sum_{i=0}^{n}Z(w_i^\bullet)T^i\in\mathcal{Z}[T]$$

とし, $\bullet$ に応じて調和正規化多項式 (*harmonic-regularized polynomial*) またはシャッフル正規化多項式 (*shuffle-regularized polynomial*) と呼ぶ. $T=0$ のときしばしば $\zeta^\bullet(\mathbf{k})$ と書き, (調和/シャッフル) 正規化多重ゼータ値 (*regularized multiple zeta value*) と呼ぶ.

evaluation map の拡張として, $\mathfrak{H}^1$ の元に対し正規化多項式を割り当てる $\mathbb{Q}$ 線型写像を $Z_T^\bullet(z_{\mathbf{k}})\coloneqq\zeta^\bullet(\mathbf{k};T)$ $(\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0)$ と定めておく. このとき $Z_T^\bullet$ は $\bullet$ に関する準同型となる: 言い換えれば任意のインデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^\bullet(\mathbf{k}\bullet\mathbf{l};T)=\zeta^\bullet(\mathbf{k};T)\zeta^\bullet(\mathbf{l};T)$$

が成り立つ. また, 定義より正規化多重ゼータ値は $\zeta^\bullet(\mathbf{k})=(Z\circ\mathrm{reg}_\bullet)(z_{\mathbf{k}})$ $(\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0)$ と書ける. 以下二つの命題は, 正規化多項式が多重調和和と多重ポリログ関数の漸近挙動を記述するものであることを主張する.

定理 2.3.41 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対しある $J>0$ があり

$$\zeta_{<M}(\mathbf{k})=\zeta^*(\mathbf{k};\log M+\gamma)+O(M^{-1}\log^J M)\qquad(M\to\infty)$$

が成り立つ. ここで γ は Euler 定数

$$\gamma=\lim_{M\to\infty}(\zeta_{<M}(1)-\log M)$$

である. また, これは調和正規化多項式を特徴づける.

定理 2.3.42 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対しある $J>0$ があり

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\zeta^ш(\mathbf{k};-\log(1-z))+O((1-z)\log^J(1-z))\qquad(z\to 1)$$

が成り立つ. また, これはシャッフル正規化多項式を特徴づける.

注意 2.3.43. 注意 2.3.38 より, 定理 2.3.42 は多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の発散に関する定理ということに他ならない: 即ちシャッフル正規化多項式は $\mathfrak{H}^1$ の word $w=e_{a_1}\cdots e_{a_n}$ $(a_1,\ldots,a_n\in\{0,1\},\ a_1=1)$ に対し

$$\lim_{z\to 1}(Z^ш_{-\log(1-z)}(w)-(-1)^{a_1+\cdots+a_n}I(0;a_1,\ldots,a_n;z))=0$$

を満たすような多項式 $Z_T^ш(W)$ のことであると考えることができる. 一方で, より一般に $a_1=1$ とは限らない $\mathfrak{H}$ の word $w=e_{a_1}\cdots e_{a_n}$ に対し

$$\lim_{(z,z')\to(0,1)}(Z^ш_{-\log z,-\log(1-z')}(w)-(-1)^{a_1+\cdots+a_n}I(z;a_1,\ldots,a_n;z'))=0$$

[12] この値はまさに正規化多項式の次数であるが, 実際は $\mathbf{k}$ の後ろに並ぶ 1 の個数に一致する.

を満たすような二変数多項式 $Z^{ш}_{S,T}(w)$ も考えることができる．これもシャッフル正規化多項式の仲間に入れることにすると一部の理論が上手くいくことが知られており, たとえば KZ 結合子 (§2.5.5) の係数はこの形の正規化まで含めて考えることで統一的に記述できる[13].

ここから正規化理論の要である "正規化定理" について述べる[14]. さて $\mathbb{R}$-線型写像 $\rho\colon \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ を

$$\exp(TX)\Gamma_0(-X) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(T^n)\frac{X^n}{n!}$$

によって定める．ここで Γ_0 は形式的冪級数

$$\Gamma_0(X) = \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k} X^k\right)$$

である[15]. なお ρ は可逆であり, 逆写像は

$$\exp(TX)\Gamma_0(-X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-1}(T^n)\frac{X^n}{n!}$$

で与えられる.

定理 2.3.44 (正規化定理; Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Theorme 1])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{ш}(\mathbf{k};T) = \rho(\zeta^{*}(\mathbf{k};T))$$

が成り立つ.

正規化多項式が満たす積構造 $\zeta^{\bullet}(\mathbf{k} \bullet \mathbf{l};T) = \zeta^{\bullet}(\mathbf{k};T)\zeta^{\bullet}(\mathbf{l};T)$ に正規化定理を適用することで, 複シャッフル関係式 (系 2.3.39) と似た形の関係式を得ることができる．これを正規化複シャッフル関係式 (*regularized double shuffle relation*, *RDS relation*) と呼ぶ[16].

定理 2.3.45 (正規化複シャッフル関係式; Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Theorem 2])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と許容インデックス $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^{\bullet}(\mathbf{k} * \mathbf{l};T) = \zeta^{\bullet}(\mathbf{k} \,ш\, \mathbf{l};T)$$

が成り立つ.

Proof. $\mathbf{l}$ が許容的であることから, 正規化定理 (定理 2.3.44) によって

$$\zeta^{ш}(\mathbf{k} \,ш\, \mathbf{l};T) = \zeta^{ш}(\mathbf{k};T)\zeta(\mathbf{l}) = \rho(\zeta^{*}(\mathbf{k};T)\zeta(\mathbf{l})) = \rho(\zeta^{*}(\mathbf{k} * \mathbf{l};T))$$

となる．この右辺に正規化定理を額面通りに用いれば $\zeta^{ш}(\mathbf{k} \,ш\, \mathbf{l};T) = \zeta^{ш}(\mathbf{k} * \mathbf{l};T)$ となって定理の $\bullet = ш$ の場合が証明でき, 両辺に ρ^{-1} を適用すれば $\bullet = *$ の場合もわかる. □

予想 2.3.46 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Conjecture 1])**.** 多重ゼータ値間に成り立つすべての $\mathbb{Q}$ 線型関係式は正規化複シャッフル関係式から導かれるであろう.

有限複シャッフル関係式を仮定したとき, 正規化定理, 正規化複シャッフル関係式, 導分関係式はそれぞれ同値である ([IKZ, Theorem 2, Theorem 3]) からこの予想は "有限複シャッフル関係式と正規化定理" などとしても同じである (これをもって RDS と呼ぶ流儀もある)．なお, 正規化複シャッフル関係式が双対関係式を含んでいるかどうかは有名な未解決問題である.

命題 2.3.47 (Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ, Proposition 10])**.** 任意の許容インデックス $\mathbf{k}$ と正整数 n に対し

$$\zeta^{\bullet}(\mathbf{k},\{1\}^n;T) = \sum_{i=0}^{n} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k},\{1\}^{n-i})\frac{T^i}{i!}$$

が成り立つ.

---

[13] しかしながら正規化の原典である [IKZ] にはこの定義は見つけられなかった．Gil–Fresán のサーベイ [GF, Definition 1.172] と Hirose–Murahara–Saito [HMS4] には該当する定義がある.

[14] 正規化定理という訳語は Hirose–Murahara–Saito [HMS2] や Kaneko–Xu–Yamamoto [KXY] の用いている "regularization theorem" の訳語である．有名な教科書 [AK] や金子氏の報告記事 [Kan1] は "正規化の基本定理" と呼んでいる.

[15] Γ という記号を用いたが, 実際に然るべき範囲ではガンマ関数と本質的に一致する $\Gamma_0(X) = \exp(-\gamma X)\Gamma(1-X)$ ことがわかる.

[16] Extended double shuffle relation (EDS relation) と呼ぶ流儀もある.

Proof. 命題 1.3.4 (resp. 命題 1.4.4) に写像 Z^* (resp. $Z^{ш}$) を適用すればわかる. □

定理 2.3.48 (シャッフル正規化和公式; Kaneko–Sakata [KS, Theorem 1.2])**.** 正整数 k, r に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k+r,r)} \zeta^{ш}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\zeta(\{1\}^{r-1}, k+1)$$

が成り立つ.

Proof. 命題 1.4.5 の両辺に Z を適用すればよい[17]. □

調和正規化多重ゼータ値は定義より調和関係式を満たすため, 命題 1.3.8 より対称和公式

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \zeta^*(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\dots,B_l} (-1)^{r-l}\prod_{i=1}^{l}(|B_i|-1)!\zeta^*\left(\sum_{j\in B_i} k_j\right)$$

を満たす ($B_1,\dots,B_l$ は $\{1,\dots,r\}$ の分割を渡る.). 一方で, 一般には調和関係式を満たさない $\zeta^{ш}$ に対しても Machide が対称和公式の類似物を発見している.

定理 2.3.49 (Machide [Mac2, Theorem 1.2])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \zeta^{ш}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\dots,B_l} (-1)^{r-l}\prod_{i=1}^{l}\chi(\mathbf{k};B_i)(|B_i|-1)!\zeta^{ш}\left(\sum_{j\in B_i} k_j\right)$$

が成り立つ. ここで $B_1,\dots,B_l$ は $\{1,\dots,r\}$ の分割全体を渡り,

$$\chi(\mathbf{k};B_i) := \begin{cases} 0 & (|B_i|>1,\ j\in B_i \implies k_j=1) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおいた.

命題 2.3.42 で述べたように, シャッフル正規化多項式は多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ の発散の度合いを記述するものである. Li [L1] の結果では, この漸近挙動の主要項だけでなく $z\to 1$ で消える項まで考察している. Ihara–Kaneko–Zagier の正規化とは異なり, 高次の係数まで含めて考えることで "調和積を持ち出すことなく" 多重ゼータ値間の線型関係式が得られることは注目に値するように思える.

定理 2.3.50 (Li [L1, Theorem 1.1, Theorem 1.2])**.** インデックス $\mathbf{k}$ と非負整数 i によって決まる多項式 $P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)\in\mathcal{Z}[T]$ であって $|z|<1$ において

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{\mathbf{k}}^{(i)}(-\log(1-z))(1-z)^i$$

が成り立つものが存在し, 冪級数

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z;T) := \sum_{i=0}^{\infty} P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)(1-z)^i$$

は任意のインデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対しシャッフル関係式

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}ш\mathbf{l}}(z;T) = \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z;T)\mathrm{Li}_{\mathbf{l}}(z;T)$$

を満たす.

また, 最近 Hirose–Murahara–Saito [HMS4] によって Ohno 関係式のシャッフル正規化多項式への一般化が得られている. 準同型 $Y^t\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}[\![t]\!]$ を

$$Y^t(e_0)=e_0,\qquad Y^t(e_1)=e_1(1-e_0t)^{-1}$$

と定め, Z を t 冪ごとに作用する $\mathfrak{H}^0[\![t]\!]$ 上の $\mathbb{Q}$ 線型写像と思うことにすると, Ohno 関係式は $Z\circ Y^t\circ\tau = Z\circ Y^t$ と同値であることに注意する[18]. さて $\mathbb{R}$ 係数多項式 $c(m,n;t)$ $(m,n\ge 0)$ を

$$\frac{\Gamma_0(-A)\Gamma_0(t-B)}{\Gamma_0(-B)\Gamma_0(t-A)} = \sum_{m,n\ge 0} c(m,n;t)A^mB^n$$

[17] [KS] の証明はこれとは異なり, Hoffman 代数を経由することなく多重ゼータ関数を用いた正規化によって証明している.

[18] 定理 2.3.26 を述べるのに導入した母関数 $\mathcal{O}^{s,t}$ を使えば $Z\circ Y^t = \mathcal{O}^{0,t}$ に他ならない.

で定め, これによって $\mathbb{R}$ 線型写像 $\rho^t\colon \mathbb{R}[S,T]\to\mathbb{R}[S,T]$ を

$$\rho^t(S^mT^n) \coloneqq \sum_{\substack{0\le i\le m\\ 0\le j\le n}} c(i,j;t)\frac{m!n!}{i!j!}S^iT^j$$

から定義する.

定理 2.3.51 (Hirose–Murahara–Saito [HMS4, Theorem 3]). 等式 $Z^{ш}_{T,S}\circ Y^t\circ\tau=\rho^t\circ Z^{ш}_{S,T}\circ Y^t$ が成り立つ. ここで $Z^{ш}_{S,T}$ は注意 2.3.43 で導入した二変数シャッフル正規化多項式である.

2.3.8. その他の関係式.

定理 2.3.52 (Euler). 正整数 k に対し

$$\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$$

が成り立つ. ここで B_{2k} は Bernoulli 数である.

定理 2.3.53 (Li–Qin [LQ2, Theorem 3.15 (3.26)]). 正整数 k,r に対し

$$\zeta(\{2k\}^r)=(-1)^{rk+r}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\ge 0\\ n_1+\cdots+n_k=rk}}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{\exp(2\pi ijn_j/k)}{(2n_i+1)!}\right)\pi^{2rk}$$

が成り立つ[19]. とくに $k=1$, $k=2$ として

$$\zeta(\{2\}^r)=\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!},\qquad \zeta(\{4\}^r)=\frac{2^{2r+1}\pi^{4r}}{(4r+2)!}$$

である[20].

定理 2.3.54 (Ohno–Zagier [OZa, Theorem 1]). 冪級数の等式

$$\sum_{k,r,s\ge 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta(\mathbf{k})\right)x^{k-r-s}y^{r-s}z^{s-1}=\frac{1}{xy-z}\left(1-\frac{\Gamma_0(x)\Gamma_0(y)}{\Gamma_0(\alpha)\Gamma_0(\beta)}\right)$$

が成り立つ. ここで α, β は

$$\alpha+\beta=x+y,\qquad \alpha\beta=z$$

から決まる値である.

系 2.3.55 (Le–Murakami の関係式; Le–Murakami [LM1, (2)]). 正整数 k,s に対し

$$I_0(k,-,s)\coloneqq\{\mathbf{k}\in\mathcal{I}'_0\mid \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s\}$$

とおくと $1\le s\le k$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(2k,-,s)}(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{k-s}\binom{2k+1}{2i}(2-2^{2i})B_{2i}\pi^{2k}$$

が成り立つ.

定理 2.3.56 (Bowman–Bradley [BB1, Corollary 5.1]). 非負整数の組 $(k_1,k_2)\neq 0$ に対し

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\ge 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}}\zeta(\{2\}^{n_1},1,\{2\}^{n_2},3,\dots,\{2\}^{n_{2k_1-1}},1,\{2\}^{n_{2k_1}},3,\{2\}^{n_{2k_1+1}})=\binom{2k_1+k_2}{k_2}\frac{\pi^{4k_1+2k_2}}{(2k_1+1)(4k_1+2k_2+1)!}$$

が成り立つ.

[19]なお, 虚数単位を i で書いている. 本テキストでは i を添え字として用いることも多いが, 文脈から推察できると思われる.

[20]Bowman–Bradley [BB2] によれば, 後者の式は系 2.3.57 とともに Zagier [Za1] が予想し Broadhurst が解いたそうである.

系 2.3.57 (Borwein–Bradley–Broadhurst–Lisoněk [BBBL, Theorem 1])**.** 正整数 r に対し

$$\zeta(\{1,3\}^r)=\frac{2\pi^{4r}}{(4r+2)!}$$

が成り立つ.

定理 2.3.58 (Bowman–Bradley [BB2, Theorem 1])**.** 正整数 r に対し

$$\zeta(3,\{1,3\}^r)=\sum_{i=0}^{r}\left(-\frac{1}{4}\right)^i\zeta(4i+3)\zeta(\{1,3\}^{r-i})$$

が成り立つ.

定理 2.3.59 (Bowman–Bradley [BB2, Theorem 2])**.** 正整数 r に対し

$$\zeta(\{3,1\}^r,2)=\frac{1}{4^r}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\zeta(\{4\}^{r-i})\left((4i+1)\zeta(4i+2)-4\sum_{j=1}^{i}\zeta(4j-1)\zeta(4i-4j+3)\right)$$

が成り立つ.

定理 2.3.60 (Zagier [Za2, Theorem 1])**.** 非負整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2})=2\sum_{i=1}^{k_1+k_2+1}(-1)^i\left(\binom{2i}{2k_1+2}-\left(1-\frac{1}{2^{2i}}\right)\binom{2i}{2k_2+1}\right)\zeta(\{2\}^{k_1+k_2-i+1})\zeta(2i+1)$$

が成り立つ.

注意 2.3.61. 定理 2.3.60 が正規化複シャッフル関係式 (定理 2.3.45) から従うかどうかは未解決問題である ([LQ2, Conjecture 3.34]).

定理 2.3.62 (Zagier [Za2, Proposition 7])**.** 正の奇数 k と和が k になる正整数 k_1, k_2 ($k_2\geq 2$) に対し

$$\zeta(k_1,k_2)=(-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\left(\binom{k-2i-1}{k_1-1}+\binom{k-2i-1}{k_2-1}-\delta_{k_2,2i}+(-1)^{k_1}\delta_{i,0}\right)\zeta(2i)\zeta(k-2i)$$

が成り立つ. ここで $\zeta(0)=-1/2$ であるとした.

定理 2.3.63 (Hirose–Sato [HS1, Theorem 1])**.** 非負整数 m, n, s に対し

$$\zeta(\{2\}^m,3,\{2\}^n,1,\{2\}^{s+1})=\zeta(\{2\}^{m+n+s+3})+\zeta(\{2\}^s,3,\{2\}^m,3,\{2\}^n)+\zeta(\{2\}^m,3,\{2\}^s,3,\{2\}^n)$$

が成り立つ.

予想 2.3.64 (Borwein–Bradley–Broadhurst [BBB, (18)])**.** 非負整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta(\{\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_1},3\}^{k_2},\{2\}^{k_1})=\frac{\pi^{4k_1k_2+2k_1+4k_2}}{(2k_2+1)(4k_1k_2+2k_1+4k_2+1)!}$$

が成り立つ.

最後の予想は Hirose–Sato [HS3] が *block shuffle identity* というものの帰結として証明を宣言している (未出版).

0 と 1 を交互に並べた有限個の列を “ブロック” といい, その文字数を長さという. 長さ 0 のブロックは考えないこととする. たとえば 01010 は長さ 5 のブロックである. 空でないインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し 0 と 1 からなる列 $B(\mathbf{k})$ を次のように定める: $W_0=0$ とし, $1\leq i\leq r$ に対し W_i は長さ k_i のブロックであり, W_i の先頭文字は W_{i-1} の末尾文字に等しい. このとき

$$B(\mathbf{k})\coloneqq W_1\cdots W_r$$

とする. たとえば $B(2,5,3)=0110101101$ である. 重さと深さの偶奇が異なる空でない許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し $B(\mathbf{k})$ の左端の 0 と右端の 1 を取り除き, $i\in\{0,1\}$ を e_i に置き換えてできる word の Z による像を $I_{\mathrm{bl}}(\mathbf{k})$ と書く.

予想 2.3.65 (Generalized cyclic insertion conjecture; Charlton [C1, Conjecture 6.3])**.** 重さ k と深さ r の偶奇が異なる空でない許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が条件

$$(1,1)\notin\{(k_1,k_2),(k_2,k_3),\dots,(k_{r-1},k_r),(k_r,k_1)\}$$

を満たすとき

$$\sum_{i=1}^{r} I_{\mathrm{bl}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})=\begin{cases}(-1)^{k/2-1}\zeta(\{2\}^{k/2-1}) & (k\text{: 偶数})\\ 0 & (k\text{: 奇数})\end{cases}$$

が成り立つであろう.

2.4. 多重ゼータスター値.

定義 2.4.1. 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}},\qquad \zeta(\varnothing)=1$$

を多重ゼータスター値 (*multiple zeta star value, MZSV*) と呼ぶ.

著者によっては *non-strict multiple zeta value* と呼ばれる場合がある. $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z^\star\colon\mathfrak{H}^0\to\mathbb{R}$ を $Z^\star(z_{\mathbf{k}})=\zeta^\star(\mathbf{k})$ ($\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0'$) から定めると, 定義より $Z^\star=Z\circ S^1$ となり (S^1 については命題 1.3.5 の直前の記述を参照.), したがって

$$\zeta^\star(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}}\zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ. 逆に MZV を MZSV で表示することもできる: $\mathbf{l}$ が $\mathbf{k}$ の縮約インデックスであるとき $\mathbf{k}$ のコンマ ‘,’ をいくつかプラス ‘+’ に変更して $\mathbf{l}$ が得られることになるが, この変更した個数を $\iota(\mathbf{k};\mathbf{l})$ と書くと

$$\zeta(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}}(-1)^{\iota(\mathbf{k};\mathbf{l})}\zeta^\star(\mathbf{l})$$

が成り立つ. 多重ゼータスター値にも多重ゼータ値で成り立つような関係式の類似がいくつか発見されている. 本小節ではそれを述べる. なお, ほとんどの関係式は対応する多重ゼータ値の関係式と代数的に同値であることが簡単な計算によりわかる.

2.4.1. 主要な関係式.

定理 2.4.2 (スター和公式)**.** 正整数 k,r ($k>r$) に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r)}\zeta^\star(\mathbf{k})=\binom{k-1}{r-1}\zeta(k)$$

が成り立つ.

定理 2.4.3 (スター Ohno 型関係式; Hirose–Imatomi–Murahara–Saito [HIMS, Theorem 1.5])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\dagger)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\ge0}^r\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}} b_1(\mathbf{k};\mathbf{e})\zeta^\star(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})=\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\ge0}^s\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\zeta^\star((\mathbf{k}^\dagger\oplus\mathbf{e})^\dagger)$$

が成り立つ. ここで

$$b_1(k_1,\dots,k_r;e_1,\dots,e_r)=\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i+e_i+\delta_{i,1}-2}{e_i},\qquad \binom{n-1}{n}=\delta_{n,0}$$

とおいた.

定理 2.4.4 (スター導分関係式; Li–Qin [LQ2, Theorem 2.5 (f)])**.** 正整数 h に対し $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\partial_h^\star\colon\mathfrak{H}^1\to\mathfrak{H}^1$ を

$$\partial_h^\star(e_0)=e_1^he_0,\qquad \partial_h^\star(e_1)=-e_1^he_0,$$
$$\partial_h^\star(WW')=\partial_h^\star(W)W'+W(\tilde{S}^{-1}\circ\partial_h\circ\tilde{S})(W')$$

で定める[21]と, 任意の $W\in\mathfrak{H}^0$ に対し $Z^\star(\partial_h(W))=0$ が成り立つ.

[21]二つ目の性質は “右 $\tilde{S}$ 導分である” といわれる. $\tilde{S}$ の定義は §1 を参照.

系 2.4.5 (スター Hoffman 関係式; Muneta [Mun2, Theorem 3.2]). 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\sum_{i=1}^{r}(k_i-1+\delta_{r,i})\zeta(\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1,\mathbf{k}^{[i]})=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(\mathbf{k}_{[i-1]},j+1,k_i-j,\mathbf{k}^{[i]})$$

が成り立つ.

定理 2.4.6 (スター巡回和公式; Ohno–Wakabayashi [OW, Theorem 1]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^\star(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i-j)=k\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

2.4.2. 複シャッフル関係式. $\mathfrak{H}^1$ 上の $\mathbb{Q}$ 双線型な積 $\overline{*}$ を次の規則で定める:

$$1\mathbin{\overline{*}}w=w\mathbin{\overline{*}}1=w,$$
$$wz_k\mathbin{\overline{*}}w'z_l=(wz_k\mathbin{\overline{*}}w')z_l+(w\mathbin{\overline{*}}w'z_l)w_k+(w\mathbin{\overline{*}}w')z_{k+l}.$$

ここで w,w' は $\mathfrak{H}^1$ の元, k, l は正整数とした. このとき $\overline{*}$ は可換かつ結合的な積となり ([Mun2, Proposition 2.3]), 次が成り立つ.

命題 2.4.7 (Ihara–Kajikawa–Ohno–Okuda [IKOO, Theorem 1]). 任意の w, $w'\in\mathfrak{H}^1$ に対し

$$S^1(w\mathbin{\overline{*}}w')=S^1(w)*S^1(w')$$

が成り立つ.

系 2.4.8 (スター調和関係式; Muneta [Mun2, Proposition 2.4]). 写像 $Z^\star$ は $\overline{*}$ に関する準同型である: 即ち許容インデックス $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^\star(\mathbf{k}\mathbin{\overline{*}}\mathbf{l})=\zeta^\star(\mathbf{k})\zeta^\star(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

同様の現象がシャッフル積に関しても成り立つ. $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$ 双線型な積 $\overline{ш}$ を次の規則で定める:

$$1\mathbin{\overline{ш}}w=w\mathbin{\overline{ш}}1=w,$$
$$we_i\mathbin{\overline{ш}}w'e_j=(we_i\mathbin{\overline{ш}}w')e_j+(w\mathbin{\overline{ш}}w'e_j)e_i-\delta_{1,w'}we_ie_{1-j}-\delta_{1,w}w'e_je_{1-i}.$$

ここで w, w' は $\mathfrak{H}$ の元, i, $j\in\{0,1\}$ とした. このとき $\overline{ш}$ は可換かつ結合的な積となり ([Mun2, Proposition 2.6]), 次が成り立つ.

命題 2.4.9 (Muneta [Mun2, (2.5)]). 任意の $W,W'\in\mathfrak{H}^1$ に対し

$$S^1(W\mathbin{\overline{ш}}W')=S^1(W)\mathbin{ш}S^1(W')$$

が成り立つ.

系 2.4.10 (スターシャッフル関係式; Muneta [Mun2, Proposition 2.7]). 写像 $Z^\star$ は $\overline{ш}$ に関する準同型である: 即ち許容インデックス $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^\star(\mathbf{k}\mathbin{\overline{ш}}\mathbf{l})=\zeta^\star(\mathbf{k})\zeta^\star(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

2.4.3. 正規化. 多重ゼータスター値の正規化理論も Muneta [Mun2] により得られている. 話はほぼ多重ゼータ値と同様に進む. 以後 $\bullet\in\{*,ш\}$ とし, $\overline{\bullet}$ の入った代数 $\mathfrak{H}^i$ を $\mathfrak{H}^i_{\overline{\bullet}}$ と書く $(i\in\{0,1\})$.

命題 2.4.11 (Muneta [Mun2, Lemma 2.10]). 同型 $\mathfrak{H}^1_{\overline{\bullet}}\simeq\mathfrak{H}^0_{\overline{\bullet}}[e_1]$ が成り立つ.

定義 2.4.12 (スター正規化多項式; Muneta [Mun2, Proposition 2.11]). 命題 2.4.11 によって, 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対しある非負整数 n と $\mathfrak{H}^0$ の元 $w_i^{\overline{\bullet}}$ が存在し

$$z_{\mathbf{k}}=\sum_{i=0}^{n}w_i^{\overline{\bullet}}\mathbin{\overline{\bullet}}e_1^{\overline{\bullet}i}$$

となる. これを用いて

$$\zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k};T) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} Z^{\star}(w_i^{\bullet})T^i \in \mathcal{Z}[T]$$

とする. $T=0$ のときは省略して $\zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k})$ と書く. また, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z_T^{\star,\bullet}\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{R}[T]$ を $z_{\mathbf{k}} \mapsto \zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k};T)$ で定める.

命題 2.4.13. 等式 $Z_T^{\star,\bullet} = Z_T^{\bullet} \circ S^1$ が成り立つ.

Proof. 写像 $Z^{\star,\bullet}$ は $\mathfrak{H}^0$ に制限すると $Z^{\star}$ に一致し, e_1 を T に送るような唯一の準同型 $\mathfrak{H}^1_{\ast} \to \mathbb{R}[T]$ として一意に特徴づけられる. 一方で $Z^{\bullet} \circ S^1$ もまったく同じ条件を満たす. □

正規化定理 (定理 2.3.44) の類似物を述べるには, 次小節に述べる “Yamamoto 積分” というものが必要になる. 正規化複シャッフル関係式の類似は成り立つ:

定理 2.4.14 (Muneta [Mun2, Theorem 2.12])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と許容インデックス $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k} \,\overline{\ast}\, \mathbf{l};T) = \zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k} \,\overline{ш}\, \mathbf{l};T)$$

が成り立つ.

Proof. 命題 2.4.13, 命題 2.4.7 より

$$\zeta^{\star,\bullet}(\mathbf{k} \,\overline{\ast}\, \mathbf{l};T) = Z_T^{\bullet}(S^1(z_{\mathbf{k}} \,\overline{\ast}\, z_{\mathbf{l}})) = Z_T^{\bullet}(S^1(z_{\mathbf{k}}) \ast S^1(z_{\mathbf{l}}))$$

であるが, $S^1(z_{\mathbf{k}}) \in \mathfrak{H}^1$, $S^1(z_{\mathbf{l}}) \in \mathfrak{H}^0$ より正規化複シャッフル関係式 (定理 2.3.45) が使えて, 命題 2.4.9 によって

$$Z_T^{\bullet}(S^1(z_{\mathbf{k}}) \ast S^1(z_{\mathbf{l}})) = Z_T^{\bullet}(S^1(z_{\mathbf{k}}) \,ш\, S^1(z_{\mathbf{l}})) = Z_T^{\bullet}(S^1(z_{\mathbf{k}} \,\overline{ш}\, z_{\mathbf{l}})) = \zeta^{\star,ш}(\mathbf{k} \,\overline{ш}\, \mathbf{l})$$

となる. □

2.4.4. その他の関係式.

定理 2.4.15 (Yamamoto [Y1, Theorem 1.1])**.** 非負整数の組 $(k_1,k_2) \neq (0,0)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta^{\star}(\{2\}^{n_1},1,\{2\}^{n_2},3,\dots,\{2\}^{n_{2k_1-1}},1,\{2\}^{n_{2k_1}},3,\{2\}^{n_{2k_1+1}})\\
&= \sum_{\substack{i,j,k,l,u,v\geq 0\\ 2i+k+u=2k_1\\ j+l+v=k_2}} (-1)^{k_2+u}(2^{2k+2l}-2)(2^{2u+2v}-2)\binom{k+l}{k}\binom{u+v}{u}\binom{2i+j}{j}\\
&\qquad \cdot \frac{B_{2k+2l}B_{2u+2v}}{(2i+1)(4i+2j+1)!(2k+2l)!(2u+2v)!}\pi^{4k_1+2k_2}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 2.4.16. この定理は Bowman–Bradley の定理 (定理 2.3.56) のスター類似であるが, 右辺が $\pi^{4k_1+2k_2}$ の有理数倍になることは Kondo–Saito–Tanaka [KST, Theorem 1.1] によって先立って示されており, Yamamoto の結果はそれの精密化であると思うことができる. なお, さらにそれ以前から $k_2=1,2$ のケースがそれぞれ Muneta [Mun1, Theorem C], Imatomi–Tanaka–Tasaka–Wakabayashi [ITTW, Theorem 1.1] によって得られていた.

定理 2.4.17 (Li–Qin [LQ2, Theorem 3.27])**.** 正整数 k,r,a $(k\geq r,\ a\geq 2)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I(k,r)} \zeta^{\star}(ak_1,\dots,ak_r) = \sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\binom{k-i}{r}\zeta(\{a\}^i)\zeta^{\star}(\{a\}^{k-i})$$

が成り立つ.

定理 2.4.18 (Muneta [Mun1, Theorem A])**.** 正整数 k,r に対し

$$\zeta^{\star}(\{2k\}^r) = (-1)^{rk}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\geq 0\\ n_1+\cdots+n_k=rk}}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{(2-4^{n_j})B_{2n_j}\exp(2\pi ijn_j/k)}{(2n_j)!}\right)\pi^{2rk}$$

が成り立つ.

系 2.4.19 (Zlobin [Zl])**.** 正整数 r に対し

$$\zeta^\star(\{2\}^r)=\left(1-\frac{1}{2^{2r-1}}\right)\frac{(-1)^{r+1}(2\pi)^{2r}B_{2r}}{(2r)!}$$

定理 2.4.20 (Aoki–Kombu–Ohno [AKO, (3.1)])**.** 冪級数の等式

$$\sum_{k,r,s\geq 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^\star(\mathbf{k})\right)x^{k-r-s}y^{r-s}z^{2s-2}=\frac{1}{(1-y)(1-\beta)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\beta,\ 1-\beta+x,\ 1\\ 2-y,\ 2-\beta\end{matrix};1\right)$$

が成り立つ. ここで α,β は

$$\alpha+\beta=x+y,\qquad \alpha\beta=xy-z^2$$

から決まる値であり, ${}_3F_2$ は超幾何級数

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,\ b,\ c\\ d,\ e\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n}\frac{(a+i)(b+i)(c+i)}{(d+i)(e+i)(1+i)}\right)x^n$$

である.

系 2.4.21 (Aoki–Ohno の関係式; Aoki–Ohno [AO, Theorem 1])**.** 正整数 k,s $(k\geq s)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,-,s)}\zeta^\star(\mathbf{k})=2\binom{k-1}{2s-1}\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\zeta(k)$$

が成り立つ.

系 2.4.22 (Li [L3, Corollary 2.3])**.** 正整数 k,r,s $(k>r\geq s)$ に対し

$$X_0^\star(k,r,s):=\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^\star(\mathbf{k})$$

とおくと, 正整数 m,n,s に対し

$$(-1)^mX_0^\star(m+n+1,n+1,s)-(-1)^nX_0^\star(m+n+1,m+1,s)\in\mathbb{Q}[\zeta(2),\zeta(3),\ldots]$$

が成り立つ.

定理 2.4.23 (Zagier [Za2, Theorem 4])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta^\star(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2})=-2\sum_{i=1}^{k_1+k_2+1}\left(\binom{2i}{2k_1}-\delta_{i,k_1}-\left(1-\frac{1}{2^{2i}}\right)\binom{2i}{2k_2+1}\right)\zeta^\star(\{2\}^{k_1+k_2+1-i})\zeta(2i+1)$$

が成り立つ.

定理 2.4.24 (Muneta [Mun1, Theorem B])**.** 正整数 r に対し

$$\zeta^\star(\{1,3\}^r)=\sum_{i=0}^{r}\zeta(\{1,3\}^i)\zeta^\star(\{4\}^{r-i})$$

が成り立つ.

定理 2.4.25 (Bachmann–Yamasaki [BY, Corollary 3.6 (3.23)])**.** 非負整数 r に対し

$$\zeta^\star(3,\{1,3\}^r)=\sum_{i=0}^{r}\left(-\frac{1}{4}\right)^i\zeta(4i+3)\zeta^\star(\{1,3\}^{r-i})$$

定理 2.4.26 (Zhao [Zh, Theorem 6.1 (ii)])**.** 非負整数 r に対し

$$\zeta^\star(2,\{1,3\}^r)=\frac{1}{2r+1}\sum_{i=0}^{r}\zeta^\star(\{1,3\}^i)\zeta^\star(\{2\}^{2r-2i+1})$$

が成り立つ.

その他, 特殊値に関する文献は数多くある (特に Zhao [Zh] はここまで挙げたものと同種の公式が大量に載っている.) が, これ以上述べることは避ける.

定理 2.4.27 (2-1 公式; Zhao [Zh, Theorem 1.2])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^\star(1,\{2\}^{k_1-1},\dots,1,\{2\}^{k_r-1})=\sum_{\mathbf{l}\preceq(2k_1-1,\dots,2k_r-1)}2^{\mathrm{dep}(\mathbf{l})}\zeta(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

注意 2.4.28. 2-1 公式の $r=1$ の場合は Zlobin [Zl, (1)], $r=2$ の場合は Ohno–Zudilin [OZu, Theorem 1] ですでに証明されていた (任意の r でも Ohno–Zudilin が同論文で予想していた.).

注意 2.4.29. §2.6 で導入する補間多重ゼータ値 (定義 2.6.1) を用いれば定理の右辺は $2^r\zeta^{1/2}(2k_1-1,\dots,2k_r-1)$ と書ける.

次の定理で述べるように, 交代和を含む形で 2-1 公式は任意のインデックスに対し拡張される. 空でない許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^\#(\mathbf{k})\coloneqq\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}2^{|\{n_1,\dots,n_r\}|}\frac{(-1)^{n_1(k_1-1)+\cdots+n_r(k_r-1)}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

とおく ($\zeta^\#(\varnothing)=0$).

定理 2.4.30 (Zhao の公式; Zhao [Zh], Yamamoto, Hirose–Sato)**.** 全単射 $\sigma\colon\mathcal{I}_0'\to\mathcal{I}_0'$ であって任意の許容インデックス $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し

$$\sigma(1,\{2\}^{l_1-1},\dots,1,\{2\}^{l_s-1})=(2l_1-1,\dots,2l_s-1)$$

を満たすものが存在して, 任意の許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^\star(\mathbf{k})=\zeta^\#(\sigma(\mathbf{k}))$$

が成り立つ.

Zhao, Yamamoto の証明は級数変形を用いており, Hirose–Sato は *iterated beta integral* という一種の反復積分を用いている ([Sa] を参照.).

2.5. **予想的全関係式.** 本小節では, 多重ゼータ値について成り立つすべての $\mathbb{Q}$ 線型関係式を導くであろうと予想されている様々な関係式族について述べる. それに該当する例として, 正規化複シャッフル関係式 (定理 2.3.45) を既に挙げているためそれは除外している. ここに述べる "全関係式予想" たちの中で解決されているものは一つもないが, 各々の間に成り立つ包含や同値性はいろいろと知られているためそれについても可能な限り述べる.

2.5.1. *Kaneko–Yamamoto* 型多重ゼータ値.

定義 2.5.1. インデックス $\mathbf{k}$,$\mathbf{l}$ と整数 $a\geq 2$ に対し Kaneko–Yamamoto 型多重ゼータ値を

$$\zeta\left(\begin{matrix}\mathbf{k}\\ \mathbf{l}\end{matrix};a\right)\coloneqq\sum_{\substack{0<N\\ 0<m_1<\cdots<m_r<N\\ 0<n_1\leq\cdots\leq n_s\leq N}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}N^a n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

で定める.

調和積の帰納的定義において最後の項だけを拾ってできる積を $\circledast$ と書く: 即ち, w, $w'\in\mathfrak{H}^1$ と正整数 k, l に対し

$$1\circledast w=w\circledast 1=w,$$
$$wz_k\circledast w'z_l=(w*w')z_{k+l}$$

とおいて $\mathbb{Q}$ 双線型な積 $\circledast$ を定義し, これを word とインデックスの対応によって $\mathcal{R}_0$ の積として考える. このとき定義より次が成り立つ.

命題 2.5.2. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$, $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)$ に対し

$$\zeta\left(\begin{matrix}k_1,\dots,k_{r-1}\\ l_1,\dots,l_{s-1}\end{matrix};k_r+l_s\right)=\zeta(\mathbf{k}\circledast\mathbf{l}^\star)$$

が成り立つ.

定理 2.5.3 (Bachmann–Kadota–Suzuki–Yamasaki–Yamamoto [BKSYY])**.** 非負整数 k, r, s $(k \geq r+s+2)$ に対し

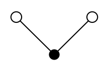
$$\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{r}\\ \mathbf{l}\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{s}\\ a\geq 2\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{wt}(\mathbf{l})+a=k}} \zeta\left(\begin{matrix}\mathbf{k}\\ \mathbf{l}\end{matrix};a\right)=\binom{k-1}{s}\zeta(k)$$

が成り立つ.

2.5.2. *Yamamoto* 積分. ここでは Yamamoto [Y3] によって導入された "2 色半順序集合" 上の積分について解説する. これはしばしば発見者である山本修司氏の名を取って Yamamoto 積分と呼ばれる.

定義 2.5.4 (2-poset)**.** 有限半順序集合 $(X, \leq_X)$ と写像 $\delta_X\colon X \to \{0,1\}$ の組を 2 色半順序集合 (*2-labeled partially ordered set*, *2-poset*) と呼ぶ. しばしば台集合のみを明示し 2-poset X などという. δ_X は *labeling map* と呼ばれ, $\delta_X(x)$ は $x \in X$ の *label* と呼ばれる. X の任意の極大元が label 0 を持ち, 任意の極小元が label 1 を持つとき許容的 (*admissible*) であるという.

以後, 2-poset を表すのに Hasse 図を用いる: label が 0 の点は $\circ$ で, 1 の点は $\bullet$ で表すことにする. たとえば $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $x_1 \leq_X x_2$, $x_1 \leq_X x_3$, $\delta_X(x_1)=1$, $\delta_X(x_2)=\delta_X(x_3)=0$ のときは



のように書く.

定義 2.5.5. 2-poset X の転置 (*transpose*) とは, 次のようにして定まる 2-poset $X^\dagger$ である:

- 台集合は一致する: $X = X^\dagger$.
- $x \leq_{X^\dagger} y \Leftrightarrow y \leq_X y$.
- $\delta_{X^\dagger}(x) = 1-\delta_X(x)$.

定義 2.5.6. 2-poset X が比較不能な元 a, b を持つとする. このとき 2-poset X_a^b を次のように定める:

- 台集合は一致する: $X = X_a^b$.
- $a \leq_{X_a^b}$ が成り立ち, それ以外の半順序構造は X と変更なし.
- labeling map は一致する: $\delta_{X_a^b} = \delta_X$.

定義 2.5.7. 2-poset X, Y が同型であるとは, 写像 $f\colon X \to Y$ が存在して次の条件を満たすものが存在することである.

- f は全単射である.
- 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し, $x_1 \leq_X x_2$ ならば $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$.
- 任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対し, $y_1 \leq_Y y_2$ ならば $f^{-1}(y_1) \leq_X f^{-1}(y_2)$.
- 任意の $x \in X$ に対し $\delta_X(x) = \delta_Y(f(x))$.

2-poset 同士の同型性は明らかに同値関係となり, したがって 2-poset の同型類[22]全体が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間が定義できる. これを $\mathfrak{P}$ と書く. さらに, 2-poset の同型類 $[X], [Y]$ の代表元 $(X, \leq_X, \delta_X), (Y, \leq_Y, \delta_Y)$ に対し

- XY は非交和 $X \sqcup Y$.
- $a, b \in XY$ に対し $a \leq_{XY} b$ であるとは $Z \in \{X, Y\}$ が存在して $a, b \in Z$ かつ $a \leq_Z b$ が成り立つこと.
- $\delta_{XY}\colon XY \to \{0,1\}$ は $\delta_{XY}|_X = \delta_X$ と $\delta_{XY}|_Y = \delta_Y$ が成り立つ唯一の写像.

と定め, $(XY, \leq_{XY}, \delta_{XY})$ (の同型類) を $[X][Y]$ とすることで $\mathfrak{P}$ に積構造が入り, $\mathbb{Q}$ 代数となる. さらに, 準同型 $W\colon \mathfrak{P} \to \mathfrak{H}_{ш}$ を次の条件で定める:

- 2-poset X が全順序集合 $\{x_1 < \cdots < x_k\}$ であるとき

$$W(X) \coloneqq \prod_{i=1}^{k} e_{\delta_X(x_i)}.$$

- 2-poset X に比較不能な元 a, b があるとき

$$W(X) = W(X_a^b) + W(X_b^a).$$

許容的な 2-poset の同型類が生成する $\mathbb{Q}$ 代数 ($\mathfrak{P}$ の部分代数) を $\mathfrak{P}^0$ とすると, 明らかに $W(\mathfrak{P}^0) = \mathfrak{H}^0$ が成り立つ.

[22]もちろん, 元の label と順序関係しか考慮していない Hasse 図そのものが同型類を表している, ともいえる.

定義 2.5.8. 2-poset $(X, \leq_X, \delta_X)$ に対し, X に付随する積分を

$$I(X) := (-1)^{\sum_{x\in X}\delta_X(x)} \int_{\Delta(X)} \prod_{x\in X} \frac{dt_x}{t_x - \delta_X(x)}$$

と定める. ここで

$$\Delta(X) = \{(t_x)_{x\in X} \in (0,1)^{|X|} \mid x \leq_X y \implies t_x < t_y\}$$

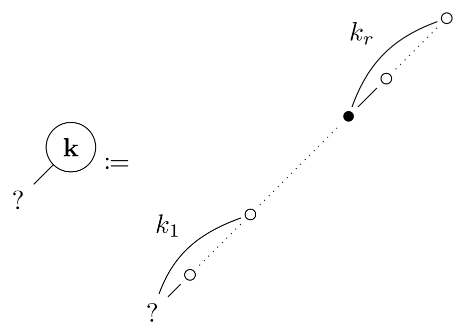
とおいた.

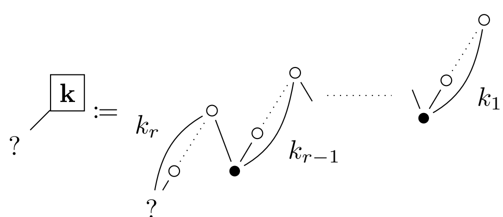
命題 2.5.9. 2-poset X に対し以下が成り立つ.

- $a, b \in X$ が比較不能なら $I(X) = I(X_a^b) + I(X_b^a)$.
- $I(X) = I(X^\dagger)$.

定義より明らかに $I = Z \circ W$ が成り立つので, 上の命題はシャッフル関係式と双対性の一般化であるといえる.

2.5.3. 積分級数等式. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $? \in \{\bullet, \circ\}$ に対し, 以下で定まる $\mathfrak{P}$ の元を考える:

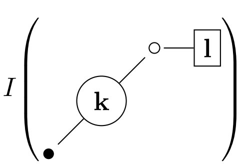




このとき次の定理が成り立つ.

定理 2.5.10 (積分級数等式; Kaneko–Yamamoto [KY, Theorem 4.1])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k} \circledast \mathbf{l}^\star) = I$$



が成り立つ.

予想 2.5.11 (Kaneko–Yamamoto [KY, Conjecture 4.3])**.** 多重ゼータ値間に成り立つすべての $\mathbb{Q}$ 線型関係式は積分級数等式から導かれるであろう.

積分級数等式のもとで調和関係式とシャッフル関係式は同値である. また, 予想 2.3.46 において正規化複シャッフル関係式も全関係式を導くであろうと述べたが, [KY, Theorem 4.6] では有限複シャッフル関係式を仮定して積分級数等式と正規化定理の同値性が示されているため, 予想 2.3.46 が正しくかつ積分級数等式から調和, シャッフルどちらかの関係式が導けるのであれば予想 2.5.11 も正しい.

積分級数等式の特殊なケースとして多重ゼータスター値の Yamamoto 積分表示が得られるが, これを用いてシャッフル正規化の変種 (Hirose–Murahara–Ono [HiMuOn1] では "Kaneko–Yamamoto's type regularization" と呼ばれている) を導入することができる.

定義 2.5.12. インデックス $\mathbf{k}$ に対し, Kaneko–Yamamoto 型シャッフル正規化多項式を

$$\zeta^{\star,\mathrm{KY}}(\mathbf{k};T) \coloneqq (Z^{ш}_T \circ W)\Bigl(\bullet\!-\!\!\boxed{\mathbf{k}}\Bigr)$$

と定める. $T=0$ のときは単に $\zeta^{\star,\mathrm{KY}}(\mathbf{k})$ などと書く.

定理 2.5.13 (Hirose–Murahara–Ono [HiMuOn1, Theorem 2.1])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\star,ш}(\mathbf{k}) - \zeta^{\star,\mathrm{KY}}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

正規化定理 (定理 2.3.44) で用いた写像 ρ のスター類似を導入する: $\mathbb{R}$ 線型写像 $\rho^\star\colon \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ を

$$\exp(TX)\Gamma_0(X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^\star(T^n)\frac{X^n}{n!}$$

によって定める.

定理 2.5.14 (Kaneko–Yamamoto [KY, Corollary 4.7])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\star,\mathrm{KY}}(\mathbf{k};T) = \rho^\star(\zeta^{\star,*}(\mathbf{k};T))$$

が成り立つ.

Machide のシャッフル正規化対称和公式 (定理 2.3.49) の Kaneko–Yamamoto 型における類似も発見されている.

定理 2.5.15 (Machide [Mac3, Theorem 1.1])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \zeta^{\star,\mathrm{KY}}(k_{\sigma(1)},\ldots,k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\ldots,B_l} \prod_{i=1}^{l} \chi(\mathbf{k};B_i)(|B_i|-1)!\,\zeta^{\star,\mathrm{KY}}\left(\sum_{j\in B_i} k_j\right)$$

が成り立つ[23]. ここで $B_1,\ldots,B_l$ は $\{1,\ldots,r\}$ の分割全体を渡る.

2.5.4. *Kawashima* 関係式.

定義 2.5.16 (Kawashima 関数; Kawashima [Kawash, §5])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k}$ に対し $\mathbf{k}^\vee=(l_1,\ldots,l_s)$ と書いたとき, 複素数 t に対し

$$F_{\mathbf{k}}(t) \coloneqq \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_s} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\binom{t}{n_r}$$

として定まる関数 $F_{\mathbf{k}}$ を *Kawashima* 関数 (*Kawashima function*) という. 収束半径は $-l_s$ である ([Kawash, Proposition 5,1]).

命題 2.5.17 (Kawashima [Kawash, Proposition 5.2])**.** 空でないインデックス $\mathbf{k}$ に対し, Kawashima 関数の $t=0$ 周りでの Taylor 級数展開は

$$F_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\zeta(\{1\}^n \circledast (\mathbf{k}^\vee)^\star)t^n$$

で与えられる.

命題 2.5.18 (Kawashima [Kawash, Proposition 4.4])**.** 十分大きい正整数 N と空でないインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$F_{\mathbf{k}}(N) = \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

が成り立つ. 逆にこの性質は Kawashima 関数を特徴づける: 級数

$$\tilde{F}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\binom{t}{n}$$

が収束半径 $-l$ (l は $\mathbf{k}$ の Hoffman 双対の末尾成分) をもつとき $\mathrm{Re}(t) > -l$ において $F_{\mathbf{k}}(t) = \tilde{F}_{\mathbf{k}}(t)$ が成り立つ.

---

[23]右辺のゼータ値は常に depth 1 であるから正規化の方法に $*, ш, (\star,*), (\star,ш), (\star,\mathrm{KY})$ のどれを用いても同じである.

定理 2.5.19 (Kawashima 関係式; Kawashima [Kawash, Theorem 5.3])**.** インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ と $\mathrm{Re}(t)>-1$ に対し

$$F_{\mathbf{k}\overline{*}\mathbf{l}}(t)=F_{\mathbf{k}}(t)F_{\mathbf{l}}(t)$$

が成り立つ.

Kawashima 関係式の両辺の係数を比較し, 命題 2.5.17 を用いて多重ゼータ値の代数関係式を得る (スターが現れないように言い換えてある.):

系 2.5.20 (Kawashima [Kawash, Corollary 5.4])**.** $\mathfrak{H}$ 上の自己同型 ϕ を定理 2.3.30 で導入したものとすると, 任意の $w,\,w'\in\mathfrak{H}^1\setminus\mathbb{Q}$ と正整数 h に対し

$$\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m+n=h}} Z(\phi(w)\circledast e_1^m)Z(\phi(w')\circledast e_1^n)=Z(\phi(w*w')\circledast e_1^h)$$

が成り立つ.

このままでは多重ゼータ値同士の積が現れるため調和関係式もしくはシャッフル関係式を用いて積を展開する必要があるが, シャッフル関係式を用いた方が線型関係式の個数が増えるということが知られている. 積が現れず, 展開の必要がない t の一次の係数を比較したものは Kawashima 関係式の線型部分と呼ばれる.

系 2.5.21 (Kawashima 関係式 (linear part))**.** 任意の $w,\,w'\in\mathfrak{H}^1\setminus\mathbb{Q}$ に対し $Z(\phi(w*w')e_0)=0$ が成り立つ.

予想 2.5.22. 多重ゼータ値間に成り立つすべての $\mathbb{Q}$ 線型関係式は (シャッフル関係式で展開した) Kawashima 関係式から導かれるであろう.

Kawashima 関係式の線型部分には双対関係式 (定理 2.3.3) と一般導分関係式 (定理 2.3.29), 定理 2.3.32 が含まれていることが知られている ([Kawash, Corollary 7.2], [Tan2, §2], [TW1, Proposition 2.5]. そもそも Tanaka, Tanaka–Wakabayashi による定理 2.3.29, 定理 2.3.32 の原証明自体 Kawashima 関係式に帰着させるものである.) が, 双対性と一般導分関係式から Kawashima 関係式が導けるかは未解決である. また, 正規化複シャッフル関係式と双対関係式を合わせると Kawashima 関係式が従うことは [KY, Theorem 6.7] で示されている.

また, Kaneko–Xu–Yamamoto [KXY] によって Kawashima 関数の別表示が示されている. そのために Hurwitz 型多重ゼータ値について少し触れる: 実数 $|t|<1$ と許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^t_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k})\coloneqq\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

とおく. 十分大きい正整数 M, 実数 $|z|<1$, $|t|<1$ とインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し Hurwitz 型の多重調和和と多重ポリログ関数をそれぞれ

$$\zeta^t_{<M,\mathrm{shift}}(\mathbf{k})\coloneqq\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<M}\frac{1}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}},$$
$$\mathrm{Li}^t_{\mathbf{k},\mathrm{shift}}(z)\coloneqq\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{z^{n_r}}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

と定める.

定理 2.5.23 (Kaneko–Xu–Yamamoto [KXY, Proposition 2.1])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対しある $J,J'>0$ があり

$$\zeta^t_{<M,\mathrm{shift}}(\mathbf{k})=\zeta^{t,*}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};\log M+\gamma)+O(M^{-1}\log^J M)\qquad(M\to\infty),$$
$$\mathrm{Li}^t_{\mathbf{k},\mathrm{shift}}(z)=\zeta^{t,\text{ш}}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};-\log(1-z))+O((1-z)\log^{J'}(1-z))\qquad(z\to 1)$$

が成り立つような多項式 $\zeta^{t,\bullet}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};T)$ が一意に存在する.

定理 2.5.24 (Kaneko–Xu–Yamamoto [KXY, Theorem 2.2])**.** インデックス $\mathbf{k}$ と実数 $|t|<1$ に対し

$$\zeta^{t,\text{ш}}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};T)=\rho(\zeta^{t,*}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};T))$$

が成り立つ.

これはもちろん正規化定理の一般化であるが, これと漸近表示 (命題 2.5.23) を用いることで Kawashima 関数の次の表示が得られる (詳細は略).

定理 2.5.25 (Kaneko–Xu–Yamamoto [KXY, Theorem 3.1])**.** インデックス $\mathbf{k}$ と実数 $|t|<1$ に対し $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$ とおくと
$$F_{\mathbf{k}}(t)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta^{\star,*}(\mathbf{k}_{[i]};T)\zeta^{t,*}_{\mathrm{shift}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}};T)$$
が成り立つ. とくに右辺は T に依らない.

2.5.5. *Drinfel'd* 結合子. ここでは Drinfel'd 結合子 (*Drinfel'd associator*) の定義を述べ, 多重ゼータ値に関連する定理を紹介する. 筆者の不勉強故記述が不完全な部分も多いが, 適宜参考文献を参照されたい. 以後, $\mathbb{K}$ を標数 0 の体, $\overline{\mathbb{K}}$ をその代数閉包とし, $\mathcal{U}\mathfrak{F}_2:=\mathbb{K}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ と書く (これに Hopf 代数構造が入ることは命題 1.4.7 で述べた.). $\mathcal{U}\mathfrak{F}_2$ の元 Φ と e_0, e_1 からなる word w に対し, Φ の w での係数を $\langle\Phi,w\rangle$ と書く. また, 変数の族 $\{t_{i,j}\}_{i,j\in\{1,2,3,4\}}$ は次の要件を満たすとする: 相異なる $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ に対し $t_{i,i}=0$, $t_{i,j}=t_{j,i}$, $t_{i,j}t_{i,k}-t_{i,k}t_{i,j}=t_{j,k}t_{i,j}-t_{i,j}t_{j,k}$ であり, また相異なる $i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$ に対し $t_{i,j}$ と $t_{k,l}$ は可換である.

定義 2.5.26 (Drinfel'd 結合子; Drinfel'd [D])**.** 冪級数 $\Phi\in\mathcal{U}\mathfrak{F}_2$ と $\mu\in\overline{\mathbb{K}}\setminus\{0\}$ が次の要件を満たすとき, Φ を結合定数 μ の Drinfel'd 結合子 (*Drinfel'd associator with coupling constant* μ) もしくは μ 結合子 (μ*-associator*) と呼ぶ.

group-like 性:
$$\Delta(\Phi)=\Phi\otimes\Phi.$$

五角形関係式:
$$\Phi(t_{1,2},t_{2,3}+t_{2,4})\Phi(t_{1,3}+t_{2,3},t_{3,4})=\Phi(t_{2,3},t_{3,4})\Phi(t_{1,2}+t_{1,3},t_{2,4}+t_{3,4})\Phi(t_{1,2},t_{2,3}).$$

六角形関係式:
$$\exp\Big(\frac{\mu}{2}(t_{1,3}+t_{2,3})\Big)=\Phi(t_{1,3},t_{1,2})\exp\Big(\frac{\mu}{2}t_{1,3}\Big)\Phi(t_{1,3},t_{2,3})^{-1}\exp\Big(\frac{\mu}{2}t_{2,3}\Big)\Phi(t_{1,2},t_{2,3}),$$
$$\exp\Big(\frac{\mu}{2}(t_{1,2}+t_{1,3})\Big)=\Phi(t_{2,3},t_{1,3})^{-1}\exp\Big(\frac{\mu}{2}t_{1,3}\Big)\Phi(t_{1,2},t_{1,3})\exp\Big(\frac{\mu}{2}t_{1,2}\Big)\Phi(t_{1,2},t_{2,3})^{-1}.$$

定理 2.5.27 (Drinfel'd [D, Theorem A])**.** 任意の標数 0 の体 $\mathbb{K}$ に対しある $\Phi\in\mathcal{U}\mathfrak{F}_2$ と $\mu\in\overline{\mathbb{K}}\setminus\{0\}$ が存在して Φ は μ 結合子となる.

定義に現れる五角形関係式と二つの六角形関係式は *GT relations* と呼ばれ, それぞれテンソル圏 (*tensor category*, Hom 集合が $\mathbb{K}$ ベクトル空間となるモノイダル圏) の五角形公理 (*pentagon axiom*) とそこに入る組紐構造 (*braiding*) が満たすべき六角形公理 (*hexagon axiom*) に対応している. GT relations は Drinfel'd によって与えられた条件であり, 実際に無限小組紐テンソル圏に形式パラメータ $\hbar$ をつけた圏 (正確にいえばもとの Hom 集合に $\mathbb{K}[\![\hbar]\!]$ をテンソルしてできる圏) が再び組紐テンソル圏になる条件が結合子によって与えられるという事実が [D] で証明されている. ここではテンソル圏の話題に関してはこれ以上深入りせず, "結合子関係式" として知られる別の定義との同値性を紹介する.

命題 2.5.28 (Furusho [F2, Lemma 4])**.** 変数の族 $\{X_{i,j}\}_{i,j\in\{1,2,3,4,5\}}$ は条件
$$X_{i,i}=0,\quad X_{i,j}=X_{j,i},\quad \sum_{j=1}^{5}X_{i,j}=0,\qquad (i,j\in\{1,2,3,4,5\}),$$
$$X_{i,j}X_{k,l}=X_{k,l}X_{i,j}\qquad (i,j,k,l\in\{1,2,3,4,5\},\ |\{i,j,k,l\}|=4)$$
を満たすとする. このとき group-like 元 $\Phi\in\mathcal{U}\mathfrak{F}_2$ が五角形関係式を満たすことと 5-cycle 関係式
$$\Phi(X_{1,2},X_{2,3})\Phi(X_{3,4},X_{4,5})\Phi(X_{5,1},X_{1,2})\Phi(X_{2,3},X_{3,4})\Phi(X_{4,5},X_{5,1})=1$$
を満たす commutator group-like 元であることは同値である. ここで $\Phi\in U\mathfrak{F}_2$ が commutator group-like であるとは group-like 性に加えて $\langle\Phi,e_0\rangle=\langle\Phi,e_1\rangle=0$ を満たすことである.

命題 2.5.29 (Drinfel'd [D, §5])**.** group-like 元 $\Phi\in U\mathfrak{F}_2$ が六角形関係式を満たすことは 2-cycle 関係式
$$\Phi(e_0,e_1)\Phi(e_1,e_0)=1$$
と 3-cycle 関係式
$$\exp\Big(\frac{\mu e_0}{2}\Big)\Phi(e_\infty,e_0)\exp\Big(\frac{\mu e_\infty}{2}\Big)\Phi(e_1,e_\infty)\exp\Big(\frac{\mu e_1}{2}\Big)\Phi(e_0,e_1)=1$$
を満たすことに同値である. ここで $e_\infty=-e_0-e_1$ と書いた.

命題 2.5.28, 命題 2.5.29 より, Drinfel'd 結合子が満たすべき関係式族を次のように言い換えられる.

命題 2.5.30. $\Phi \in \mathcal{U}\mathfrak{F}_2$ と $\mu \in \overline{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$ に対し Φ が μ 結合子であることは以下の四条件を満たすことと同値である.

commutator group-like 性:

$$\Phi(e_0, e_1) = 1 + (\text{次数 } 2 \text{ 以上の項}), \qquad \Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi.$$

2-cycle 関係式:

$$\Phi(e_0, e_1)\Phi(e_1, e_0) = 1.$$

3-cycle 関係式:

$$\exp\Big(\frac{\mu e_0}{2}\Big)\Phi(e_\infty, e_0)\exp\Big(\frac{\mu e_\infty}{2}\Big)\Phi(e_1, e_\infty)\exp\Big(\frac{\mu e_1}{2}\Big)\Phi(e_0, e_1) = 1.$$

5-cycle 関係式:

$$\Phi(X_{1,2}, X_{2,3})\Phi(X_{3,4}, X_{4,5})\Phi(X_{5,1}, X_{1,2})\Phi(X_{2,3}, X_{3,4})\Phi(X_{4,5}, X_{5,1}) = 1.$$

この四条件をまとめて結合子関係式 (*associator relation*) と呼ぶ. それぞれの両辺を比較することで Φ の係数に関する関係式がたくさん現れるが, 実は多重ゼータ値がこれらの関係式を満たすことを示せる. 注意 2.3.43 に遡って $Z^{ш}_{S,T} \colon \mathfrak{H} \to \mathbb{R}[S,T]$ の定義を思い出しておく.

定義 2.5.31. *Knizhnik–Zamolodchikov* 結合子 (*KZ associator*) $\Phi_{\mathrm{KZ}} \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ を

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0, e_1) \coloneqq \sum_{w \in \{e_0, e_1\}^\times} (-1)^{\mathrm{dep}(W)} Z^{ш}_{0,0}(w)\overleftarrow{w}$$

で定める. ここで $\{e_0, e_1\}^\times$ は e_0, e_1 からなる word 全体の集合である.

定理 2.5.32. Φ_{KZ} は結合定数 $2\pi i$ の Drinfel'd 結合子である.

ここでは定義としてシャッフル正規化多重ゼータ値の母関数としての表示を採用したが, 歴史的には Drinfel'd によって常微分方程式 (KZ 方程式)

$$\frac{d}{dz}G(z) = \left(\frac{e_0}{z} - \frac{e_1}{1-z}\right)G(z)$$

の解から Φ_{KZ} が構成され, Le–Murakami [LM2, Theorem A.9], Furusho [F1, Proposition 3.2.3] によって多重ゼータ値による明示公式 (定義 2.5.31) が与えられた, という形である. KZ 方程式の解による Φ_{KZ} の構成と結合子関係式の証明は Harada [Ha] に詳しい. なお, 結合子関係式に挙げた 2-cycle 関係式と 3-cycle 関係式については, 実は不要であったことがわかっている.

定理 2.5.33 (Furusho [F2, Theorem 1])**.** $\Phi \in U\mathfrak{F}_2$ が group-like であり五角形関係式を満たせば六角形関係式を満たし, 結合定数は $\mu = \pm(24\langle\Phi, e_0 e_1\rangle)^{1/2}$ となる.

また, この小々節が §2.5 に分類されていることからもわかるように, 以下が予想されている:

予想 2.5.34 (Furusho [F1, Conjecture 4.3.10])**.** 多重ゼータ値間に成り立つすべての $\mathbb{Q}$ 線型関係式は結合子関係式から導かれるであろう.

予想 2.3.46 において正規化複シャッフル関係式に対しても同じ予想がなされていることを述べたが, Drinfel'd–Terasoma および Furusho [F3] では片側の包含が示されている.

定理 2.5.35 (Furusho [F3, Theorem 0.2])**.** 結合子関係式から正規化複シャッフル関係式が従う.

なお, Hopf 代数構造 (命題 1.4.7) を使うことで 2-cycle 関係式は多重ゼータ値の双対性 (定理 2.3.3) と同値であることがわかるため (Tanaka [Tan1] を参照), 実際は結合子関係式から正規化複シャッフル関係式と双対性も従い, ゆえに Kawashima 関係式も従う (定理 2.3.45 の包含については Racinet [Ra] による別の定式化を用いている.). また, 本稿では詳しく述べないが, 合流関係式 (*confluence relation*) というこれまた巨大な関係式族が Hirose–Sato [HS2, Theorem 21] で証明されている (こちらも予想的全関係式である [HS2, Conjecture 26]). こちらは多重ゼータ値の反復積分表示においてパラメータ z を付け加えて考え, $z \to 1$ という "合流" 操作を施すことで関係式を得るという結合子関係式とはまったく出自の異なる代物であるが, Furusho によって驚くべき定理が示されている:

定理 2.5.36 (Furusho [F4, Theorem 1])**.** 結合子関係式と合流関係式は同値である.

2.6. **補間多重ゼータ値.** 本小節では, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を包括的に扱う枠組みの一つとして, Yamamoto [Y2] により提案された補間多重ゼータ値について定義, 代数的定式化と知られている関係式について述べる. 多重ゼータスター値のときと同様, 補間多重ゼータ値の関係式も対応する多重ゼータ値の関係式から代数的に導けることが多い. 以後, τ は不定元とする[24].

定義 2.6.1 (Yamamoto [Y2])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\zeta^{\tau}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{\tau^{\#\{n_1,\dots,n_r\}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\in\mathbb{R}[\tau]$$

を補間多重ゼータ値 (*interpolated multiple zeta values*, τ-*MZV*) と呼ぶ.

定義より $\zeta^0=\zeta$, $\zeta^1=\zeta^{\star}$ であり, 多重ゼータ値係数の多項式としての表示

$$\zeta^{\tau}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}}\zeta(\mathbf{l})\tau^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})-\mathrm{dep}(\mathbf{l})}$$

をもつ. Hoffman 代数によって取り扱う枠組みを作っておく: 以後 $\mathfrak{H}^?_{\tau}=\mathfrak{H}^?[\tau]$ とおき $(?\in\{\varnothing,0,1\})$, $\mathbb{Q}[\tau]$ 線型写像 $Z^{\tau}\colon\mathfrak{H}^0\to\mathbb{R}$ を $z_{\mathbf{k}}\mapsto\zeta^{\tau}(\mathbf{k})$ $(\mathbf{k}\in\mathcal{I}'_0)$ から定める. $\mathfrak{H}_{\tau}$ 上の自己同型 $\tilde{S}^{\tau}$ を $e_0\mapsto e_0$ と $e_1\mapsto\tau e_0+e_1$ で定め, $\mathbb{Q}[\tau]$ 線型写像 $S^{\tau}\colon\mathfrak{H}^1_{\tau}\to\mathfrak{H}^1_{\tau}$ を $S^{\tau}(e_1W)\coloneqq e_1\tilde{S}^{\tau}(W)$ とすれば $Z^{\tau}=Z\circ S^{\tau}$ が成り立つ (Z は $\mathfrak{H}^0_{\tau}$ へ $\mathbb{Q}[\tau]$ 線型に拡張している.). とくに, $\tau=1$ とすれば §1 で定義した S^1 と一致する.

命題 2.6.2. $\mathfrak{H}^1[\tau,\tau']$ 上で $S^{\tau}\circ S^{\tau'}=S^{\tau+\tau'}$ が成り立つ.

調和積とシャッフル積の補間もここで定義しておく. $\mathfrak{H}^1_{\tau}$ 上の $\mathbb{Q}[\tau]$ 双線型な積 $\overset{\tau}{*}$ を

$$1\overset{\tau}{*}w=w\overset{\tau}{*}1=w,$$
$$wz_k\overset{\tau}{*}w'z_l=(wz_k\overset{\tau}{*}w')z_l+(w\overset{\tau}{*}w'z_l)z_k+(1-2\tau)(w\overset{\tau}{*}w')z_{k+l}+(1-\delta_{1,w}\delta_{1,w'})(\tau^2-\tau)(w\overset{\tau}{*}w')e_0^{k+l}$$

と定め $(w,\,w'\in\mathfrak{H}^1_{\tau},\,k,\,l\ge1)$, $\mathfrak{H}_{\tau}$ 上の $\mathbb{Q}[\tau]$ 双線型な積 $\overset{\tau}{ш}$ を

$$1\overset{\tau}{ш}w=w\overset{\tau}{ш}1=w,$$
$$we_i\overset{\tau}{ш}w'e_j=(we_i\overset{\tau}{ш}w')e_j+(w\overset{\tau}{ш}w'e_j)e_i-\delta_{1,w'}j\tau we_ie_{1-j}-\delta_{1,w}i\tau w'e_je_{1-i}$$

と定める $(w,\,Ww'\in\mathfrak{H}_{\tau},\,i,\,j\in\{0,1\})$. これらはそれぞれ可換かつ結合的な積であり, $\mathfrak{H}^i$ を入れた $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathfrak{H}^i_{\tau,\bullet}$ $(i\in\{0,1\})$ が定まる.

命題 2.6.3 (Yamamoto [Y2, Theorem 3.8], Li–Qin [LQ1, Proposition 2.1])**.** 任意の $w,\,w'\in\mathfrak{H}^1_{\tau}$ に対し

$$S^{\tau}(w\overset{\tau}{\bullet}w')=S^{\tau}(w)\bullet S^{\tau}(w')$$

が成り立つ.

命題 2.6.4 (Yamamoto [Y2, Proposition 3.9])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}(-1)^iS^{\tau}(z_{\mathbf{k}_{[i]}})*S^{1-\tau}(z_{\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}})=\delta_{\varnothing,\mathbf{k}}$$

が成り立つ.

2.6.1. 関係式族.

定理 2.6.5 (和公式; Yamamoto [Y2, Theorem 1.1])**.** 正整数 $k,\,r$ $(k>r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r)}\zeta^{\tau}(\mathbf{k})=\left(\sum_{j=0}^{r-1}\binom{k-1}{j}\tau^j(1-\tau)^{r-1-j}\right)\zeta(k)$$

が成り立つ.

[24] 補間多重ゼータ値を扱うほとんどの文献では t を用いているが, 後に扱う予定である t 進対称多重ゼータ値と記号が重複するため τ を用いる.

定理 2.6.6 (Ohno 型関係式; Hirose–Murahara–Ono [HiMuOn2, Theorem 1.4]). 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\dagger)}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\zeta^\tau((\mathbf{k}^\dagger\oplus\mathbf{e})^\dagger)$$

$$=\sum_{\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_s)\preceq\mathbf{k}}(\tau^2-\tau)^{r-s}\sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_s)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^s\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\left(\prod_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{e_i}\binom{e_i-j}{I_i-1}\binom{l_i+\delta_{l_i,1}+e_i-I_i-1}{j}\tau^j(1-\tau)^{e-I_i-j+1}\right)\zeta^\tau(\mathbf{l}\oplus\mathbf{e})$$

が成り立つ. ここで I_i は $\mathbf{k}$ を縮約して $\mathbf{l}$ を作る際, 足し合わせて l_i となった $\mathbf{k}$ の隣り合う成分の個数である.

正整数 h に対し $\mathfrak{H}_\tau$ 上の導分 ∂_h^τ を

$$\partial_h^\tau(e_0)\coloneqq e_1((1-\tau)e_0+e_1)^{h-1}e_0,\qquad \partial_h^\tau(e_1)\coloneqq -e_1((1-\tau)e_0+e_1)^{h-1}e_0$$

で定める.

定理 2.6.7 (導分関係式; Li [L4, Theorem 2.3 (6)]). 任意の $W\in\mathfrak{H}_\tau^0$ に対し $Z^\tau(\partial_h^\tau(W))=0$ が成り立つ.

系 2.6.8 (Hoffman 関係式; Li–Qin [LQ1, Theorem 2.5], Wakabayashi [Wak, Corollary 1.2]). 空でない許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}(1+(k_i-2+\delta_{r,i})\tau)\zeta^\tau(\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1,\mathbf{k}^{[i]})\\&\qquad=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^\tau(\mathbf{k}_{[i-1]},j+1,k_i-j,\mathbf{k}^{[i]})+(\tau^2-\tau)\sum_{i=1}^{r-1}\zeta^\tau(\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+k_{i+1}+1,\mathbf{k}^{[i+1]})\end{aligned}$$

が成り立つ.

Tanaka–Wakabayashi の一般化した巡回和公式 (定理 2.3.32) の補間も発見されている: h を正整数とし, $\mathfrak{H}_\tau$ から $\mathfrak{H}_\tau^{h+1}$ への作用 $\odot$ を §2.3.5 で定義したものと同じ規則で定める. $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\mathcal{C}_{h,\tau}\colon\mathfrak{H}_\tau\to\mathfrak{H}_\tau^{\otimes(h+1)}$ を

$$e_0\mapsto e_1\otimes((1-\tau)e_0+e_1)^{\otimes(h-1)}\otimes e_0,\qquad e_1\mapsto -e_1\otimes((1-\tau)e_0+e_1)^{\otimes(h-1)}\otimes e_0,$$
$$\mathcal{C}_{h,\tau}(ww')=\mathcal{C}_{h,\tau}(w)\odot\tilde{S}^{-\tau}(w')+\tilde{S}^{-\tau}(w)\odot\mathcal{C}_{h,\tau}(w')\qquad(w,w'\in\mathfrak{H}_\tau)$$

で定め, $\mathcal{C}_{h,\tau}(w)$ のテンソル積を通常の積に差し替えたものを $\rho_{h,\tau}(w)$ と書く.

定理 2.6.9 (Tanaka–Wakabayashi [TW2, Proposition 4]). 任意の $w\in\check{\mathfrak{H}}^1[\tau]$ と正整数 h に対し $Z^\tau(\rho_{h,\tau}(w))=0$ が成り立つ.

系 2.6.10 (巡回和公式; Yamamoto [Y2, Theorem 5.4]). 重さ k のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^\tau(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i-j)=(1-\tau)\sum_{i=1}^{r}\zeta(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1)+\tau^r k\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

定理 2.6.11 (調和関係式). 許容インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^\tau(\mathbf{k}\overset{\tau}{*}\mathbf{l})=\zeta^\tau(\mathbf{k})\zeta^\tau(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

定理 2.6.12 (シャッフル関係式; Li–Qin [LQ1, Theorem 2.1]). 許容インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^\tau(\mathbf{k}\overset{\tau}{\sqcup\!\sqcup}\mathbf{l})=\zeta^\tau(\mathbf{k})\zeta^\tau(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

定理 2.6.13 (正規化複シャッフル関係式; Li–Qin [LQ1, Theorem 2.4], Wakabayashi [Wak, Theorem 1.1])**.** 同型 $\mathfrak{H}^1_{\tau,\bullet} \simeq \mathfrak{H}^0_{\tau,\bullet}[e_1]$ (Li [L4, Lemma 2.1]) によって, 準同型 $Z^{\tau,\bullet}_T\colon \mathfrak{H}^1_{\tau,\bullet} \to \mathbb{R}[\tau, T]$ であって $\mathfrak{H}^0_\tau$ への制限が Z^τ に一致し, e_1 を T に送るものが一意に存在する. このとき $\mathbb{Q}[\tau]$ 線型写像 $\zeta^{\tau,\bullet}(-;T)\colon \mathcal{R}_0[\tau] \to \mathbb{R}[\tau,T]$ を $\mathbf{k} \mapsto Z^{\tau,\bullet}_T(z_\mathbf{k};T)$ で定めれば, インデックス $\mathbf{k}$, と許容インデックス $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta^{\tau,\bullet}(\mathbf{k} * \mathbf{l}; T) = \zeta^{\tau,\bullet}(\mathbf{k} \sqcup\!\sqcup \mathbf{l}; T)$$

が成り立つ.

定理 2.6.14 (シャッフル正規化和公式; Li [L4, Theorem 3.4])**.** 正整数 k, r に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k+r,r)} \zeta^{\tau,\sqcup\!\sqcup}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1}\tau^{r-i} \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_i)\in I(k+r,i)\\ k_i>k}} \binom{k_i}{k+1} \zeta^\tau(k_1,\dots,k_i)$$

が成り立つ.

定理 2.6.15 (Kaneko–Sakata 型和公式; Li [L4, Theorem 3.6])**.** 正整数 k, r に対し

$$\zeta^\tau(\{1\}^{r-1}, k+1) = \sum_{j=1}^{\min\{k,r\}} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}\in I(k,j)\\ (\mathbf{l},l)\in I(r,j)}} \frac{1-\tau^l}{1-\tau} \zeta(\mathbf{k} \oplus (\mathbf{l}, l))$$

が成り立つ.

定理 2.6.16 (Guo–Xie 型和公式; Li [L4, Theorem 3.11])**.** 正整数 k, r $(k > r \geq 2)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I_0(k,r)} D(k_2,\dots,k_r)\zeta^\tau(\mathbf{k}) \\
&- \tau \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_{r-1})\in I_0(k,r-1)} (D(\mathbf{k}) - (1-\delta_{1,r})D(k_2,\dots,k_{r-1}) + \delta_{1,r}k)\zeta^\tau(\mathbf{k}) \\
&+ (\tau-\tau^2) \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_{r-2})\in I_0(k,r-2)} \sum_{i=1}^{r-2} \binom{k_i-1}{2} \zeta^\tau(\mathbf{k}) \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^{r-2} \left(k\binom{k-1}{i} - (k-r+1)\binom{k-1}{i-1} \right) \tau^i (1-\tau)^{r-1-i} + k(1-\tau)^{r-1} + \binom{k-1}{r-1}\tau^{r-1} \right) \zeta(k)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで D は定理 2.3.17 で導入した量である.

定理 2.6.17 (Li [L4, Corollary 4.11 (4.24)])**.** 正整数 k, r, a $(k \geq r,\ a \geq 2)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in I(k,r)} \zeta(ak_1,\dots,ak_r) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\min\{r,i\}} (-1)^{i+j} \binom{k-j}{k-r} \binom{i}{j} \tau^{r-j} \zeta(\{a\}^i) \zeta^\star(\{a\}^{k-i})$$

が成り立つ.

定理 2.3.30 で定義した ϕ を用いて $\phi^\tau := -S^{-\tau} \circ \phi \circ S^\tau$ と定める. インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\phi^1(z_\mathbf{k}) = z_{\mathbf{k}^\vee}$ が成り立つことに注意せよ. また, $w \overset{\tau}{\circledast} w' := S^{-\tau}(S^\tau(w) \circledast S^\tau(w'))$ とすることで積 $\overset{\tau}{\circledast}$ を定める.

定理 2.6.18 (Kawashima 関係式; Tanaka–Wakabayashi [TW2, Theorem 1])**.** 任意の w, $w' \in \mathfrak{H}^1_\tau \setminus \mathbb{Q}[\tau]$ と正整数 h に対し

$$\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m+n=h}} Z^\tau(\phi^\tau(w) \overset{\tau}{\circledast} e_1(e_1-e_0\tau)^{m-1}) Z(\phi^\tau(w') \overset{\tau}{\circledast} e_1(e_1-e_0\tau)^{n-1}) = -Z(\phi^\tau(w \overset{\tau}{*} w') \overset{\tau}{\circledast} e_1^h)$$

が成り立つ.

定理 2.6.19 (Li [L4, Theorem 4.4])**.** 正整数 k, r に対し

$$\zeta^\tau(\{2k\}^r) = \sum_{i=0}^{r} \zeta(\{2k\}^i) \zeta^\star(\{2k\}^{r-i}) (1-\tau)^i \tau^{r-i}$$

が成り立つ.

次の定理は Ohno–Zagier の定理 (定理 2.3.54) と Aoki–Kombu–Ohno の定理 (定理 2.4.20) の共通の一般化である.

定理 2.6.20 (Li–Qin [LQ1, Theorem 3.1])**.** 冪級数の等式

$$\sum_{k,r,s\geq 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\tau}(\mathbf{k})\right)x^{k-r-s}y^{r-s}z^{2s-2}=\frac{1}{(1-y)(1-\beta)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\gamma_1-\beta,\ 1-\gamma_2-\beta,\ 1\\ 2-y,\ 2-\beta\end{matrix};1\right)$$

が成り立つ. ここで α, β, γ_1, γ_2 は

$$\alpha+\beta=x+y\tau,\qquad \alpha\beta=\tau(xy-z^2),\qquad \gamma_1+\gamma_2=-x+(1-\tau)y,\qquad \gamma_1\gamma_2=(\tau-1)(xy-z^2)$$

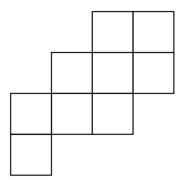
から決まる値である.

2.7. 多重ゼータ値の変種.

2.7.1. *Schur* ゼータ関数. 正整数 r に対し, 重さ r のインデックス $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_a)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^a$ が n の分割 (*partition*) であるとは, 成分が前から広義単調減少である, 即ち $\lambda_i\geq\lambda_{i+1}$ $(i=1,\ldots,k-1)$ を満たすことである. 0 の分割 (空分割) がただ一つ存在すると考え, これを $\varnothing$ と書く. 分割の長さ k を以後 $\mathrm{dep}(\lambda)$ と書くことにする. 二つの分割[25] $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_a)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_b)$ に対し, $a\geq b$ であり $j=1,\ldots,a$ において $\lambda_j\geq\mu_j$ であるとき $\lambda\supset\mu$ と書く. このとき

$$D(\lambda/\mu)\coloneqq\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\mid 1\leq i\leq a,\ \mu_i<j<\lambda_i\}$$

とおき[26], 形 λ/μ の *Young* 図形 (*Young diagram of shape* λ/μ) と呼ぶ. $\lambda/\varnothing$ は明らかに λ と同一視できるので, 以後誤解の恐れがなければ $\lambda/\varnothing$ を λ と略記する. これをしばしば正方形を並べて表す: たとえば, $\lambda=(4,3,3)$, $\mu=(2,1)$ のとき λ/μ は



のように描画される (λ に相当する絵を描き, μ に相当する部分を左上に重ね合わせてその部分を消去することでできる.). 形 λ/μ の Young 図形 $D(\lambda/\mu)$ に対し, 写像 $T\colon D(\lambda/\mu)\to\mathbb{Z}_{\geq 1}$ であって $(i,j)\in D(\lambda/\mu)$ に対し $T(i,j)\leq T(i,j+1)$, $T(i,j)<T(i+1,j)$ を満たす[27]ものを半標準 *Young* 盤 (*semi-standard Young tableau*) と呼ぶ. 形 λ/μ の半標準 Young 盤全体のなす集合を $\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$ とおく.

定義 2.7.1. Young 図形 $D(\lambda/\mu)$ で添字づけられた複素数 $(s_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}$ に対し

$$\zeta_{\lambda/\mu}((s_{i,j})_{i,j})=\sum_{T\in\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}T(i,j)^{-s_{i,j}}$$

を *Schur* 多重ゼータ関数 (*Schur multiple zeta function*) と呼ぶ.

これは Yamamoto の補間多重ゼータ値 (定義 2.6.1) とは別の方向で MZV と MZSV の補間を与えている. 実際, 許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$\zeta_{\{1\}^r}(\mathbf{k})=\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline k_1\\ \hline \vdots\\ \hline k_r\\ \hline\end{array}\right)=\zeta(\mathbf{k}),\qquad \zeta_{(r)}(\mathbf{k})=\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline k_1&\cdots&k_r\\ \hline\end{array}\right)=\zeta^{\star}(\mathbf{k})$$

となる. 一般の Schur 多重ゼータ関数の収束域は次で与えられる: Young 図形の元 $(i,j)\in D(\lambda/\mu)$ であって $(i,j+1)$, $(i+1,j)\notin D(\lambda/\mu)$ を満たす[28]もの全体の集合を $C(\lambda/\mu)$ と書くと, $\zeta_{\lambda/\mu}$ の絶対収束域は

$$W_{\lambda/\mu}\coloneqq\left\{(s_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}\ \middle|\ \begin{array}{ll}\mathrm{Re}(s_{i,j})>1 & ((i,j)\in C(\lambda/\mu))\\ \mathrm{Re}(s_{i,j})\geq 1 & ((i,j)\notin C(\lambda/\mu))\end{array}\right\}$$

となる ([NPY, Lemma 2.1]).

---

[25] 同じ正整数の分割である必要はない.

[26] 分割の長さより大きい成分は必要に応じて 0 だと思うことにする.

[27] $(i,j)\notin D(\lambda/\mu)$ のときは $T(i,j)=0$ と約束する.

[28] このような頂点はしばしば角 (*corner*) と呼ぶ.

$\mathbb{Q}[\![x_1, x_2, \ldots]\!]$ の次数有限な元であって変数の入れ替えで不変なものを 対称関数 と呼ぶ. Young 図形 $D(\lambda/\mu)$ に対して定まる対称関数

$$s_{\lambda/\mu} \coloneqq s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \ldots) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} x_{T(i,j)}$$

は (skew) Schur 関数と呼ばれ, 一般線型群の有限次元既約表現の指標を司る重要な対象である. Schur 多重ゼータ関数はこれの類似だと思うことができ, Schur 関数で成り立つ性質はある程度 Schur 多重ゼータ関数でも成り立つことが知られている. 以下にその実例を示す: Schur 関数の定義において r の分割 λ をそれぞれ $(1, \cdots, 1)$, (r) ととった対称関数を

$$e_r(x_1, x_2, \ldots) \coloneqq \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_r} x_{n_1} \cdots x_{n_r}, \qquad h_r(x_1, x_2, \ldots) \coloneqq \sum_{1 \le n_1 \le \cdots \le n_r} x_{n_1} \cdots x_{n_r}$$

と書くことにする. これらは明らかに MZV, MZSV の類似物であり, それぞれ基本対称関数, 完全対称関数と呼ばれる. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_a)$ と $i = 1, \ldots, \lambda_1$ に対し $\lambda'_i = |\{j \in \{1, \ldots, a\} \mid \lambda_j \ge i\}|$ とすると $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{\lambda_1})$ は $\mathrm{wt}(\lambda)$ の分割となり, これを λ の転置 (*transpose*) と呼ぶ (この定義は Young 図形の転置を取るとわかる.). このとき次が成り立つ:

定理 2.7.2. $\mu \subset \lambda$ なる分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_a)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_b)$ に対し, その転置をそれぞれ $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_c)$, $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_d)$ と書くと

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - i - (\mu_j - j)})_{1 \le i,j \le a} = \det(e_{\lambda'_i - i - (\mu'_j - j)})_{1 \le i,j \le l(\lambda')}$$

が成り立つ. ここで $h_0 = e_0 = 1$, $h_n = e_n = 0$ $(n < 0)$ とおいた.

これは Jacobi–Trudi の公式と呼ばれる結果であり, Schur 多重ゼータ関数でも同様のことがわかっている.

定理 2.7.3 (Nakasuji–Phuksuwan–Yamasaki [NPY, Theorem 4.3])**.** $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ を定理 2.7.2 と同様にする.

$$W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu} \coloneqq \{(s_{i,j}) \in W_{\lambda/\mu} \mid j - i = j' - i' \implies s_{i,j} = s_{i',j'}\}$$

とおき, $(s_{i,j}) \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ のとき $s_{i,j} = s_{j-i}$ と書く. このとき $1 \le i \le a$ に対し $\mathrm{Re}(s_{\lambda_i - i}) > 1$ ならば

$$\zeta_{\lambda/\mu}((s_{j-i})_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)}) = \det(\zeta^\star(s_{\mu_j - j + 1}, \ldots, s_{\lambda_i - i}))_{1 \le i,j \le a}$$

が成り立つ. ここで $\mu_j - j = \lambda_i - i$ なら成分は 1, $\mu_j - j < \lambda_i - i$ なら 0 とおいた. また $1 \le i \le c$ に対し $\mathrm{Re}(s_{i - \lambda'_i}) > 1$ のとき, 成分に関する convention を同様にしておくと

$$\zeta_{\lambda/\mu}((s_{j-i})_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)}) = \det(\zeta(s_{-\mu'_j + j - 1}, \ldots, s_{i - \lambda'_i}))_{1 \le i,j \le c}$$

が成立する.

ここでは state しないが, 他にも Giambelli 公式, 双対 Cauchy 公式といった Schur 関数に対して一般に成り立つ定理が存在し, それらの類似物が Schur 多重ゼータ関数においても成り立つことが知られている.

2.7.2. *Odd variants* と一変数多重ポリログ. 和の範囲を mod 2 で細かくした多重ゼータ値の部分級数をレベル 2 の多重ゼータ値 (*MZVs of level two*) という. Hoffman [Ho6] と Kaneko–Tsumura [KT] によってそれぞれ多重 t 値 (*multiple t-values*), 多重 T 値 (*multiple T-values*) という対象が導入されている: 許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し

$$t(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{(2n_1 - 1)^{k_1} \cdots (2n_r - 1)^{k_r}}, \qquad T(\mathbf{k}) \coloneqq 2^r \sum_{\substack{0 < n_1 < \cdots < n_r \\ n_i \equiv i \ (\mathrm{mod}\ 2)}} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

とおく. 多重 t 値は定義より Hurwitz 型多重ゼータ値 $\zeta^t_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k})$ を用いて $t(\mathbf{k}) = 2^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} \zeta^{-1/2}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k})$ と書くこともでき, 和の範囲がすべて奇数であることから多重ゼータ値のときと同様に次が成り立つ:

定理 2.7.4 (調和関係式; Hoffman [Ho6, Theorem 3.1])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$t(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = t(\mathbf{k}) t(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

これに基づいて, 調和正規化のような現象もみられる ([Ho6, Theorem 3.3]). 一方で, $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}\in\{0,1\}$ に対し

$$I_T(0;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r;1)\coloneqq\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\prod_{i=1}^{k}\left((1-\varepsilon_i)\frac{1}{t_i}+\varepsilon_i\left(\frac{1}{1-t_i}+\frac{1}{1+t_i}\right)\right)dt_i$$

とおけば多重 T 値は積分表示

$$T(k_1,\dots,k_r)=I_T(0;1,\{0\}^{k_1-1},\dots,1,\{0\}^{k_r-1};1)$$

をもつことから, 次がわかる:

定理 2.7.5 (シャッフル関係式; Kaneko–Tsumura [KT]). 許容インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$T(\mathbf{k}\sqcup\!\sqcup\,\mathbf{l})=T(\mathbf{k})T(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

定理 2.7.6 (双対性; Kaneko–Tsumura [KT, Theorem 3.1]). 許容インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$T(\mathbf{k})=T(\mathbf{k}^\dagger)$$

が成り立つ.

また, 多重 T 値には Ohno–Zagier の定理 (定理 2.3.54) の対応物が存在し, 系として重み付き和公式の類似が証明されている.

定理 2.7.7 (Takeyama [Tak, Theorem 1.1]). 冪級数の等式

$$1-\sum_{1\le r<k}\left(\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{2^r}\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}T(\mathbf{k})\right)x^{k-r}y^r=\exp\left(\sum_{k\ge2}\frac{T(k)}{2k}(x^k+y^k-(x+y^k))\right)$$

が成り立つ.

系 2.7.8 (Kaneko–Tsumura [KT, Theorem 3.2]). 整数 $k\ge3$ に対し

$$\sum_{j=1}^{k-2}2^{k-j-1}T(j,k-j)=(k-1)T(k)$$

が成り立つ.

定理 2.7.9 (Berger–Chandra–Jain–Xu–Xu–Zhao [BCJXXZ, Theorem 1.1]). 整数 $k\ge4$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)\in I_0(k,3)}2^{k_2}(3^{k_3-1}-1)T(\mathbf{k})=\frac{2}{3}(k-1)(k-2)T(k)$$

が成り立つ.

レベル 2 の多重ゼータ値は明らかに交代多重ゼータ値 (*alternating multiple zeta value*)

$$\zeta(k_1,\dots,k_r;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\coloneqq\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{(-1)^{\varepsilon_1n_1+\cdots+\varepsilon_rn_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\qquad\left(\begin{array}{l}\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\in\{0,1\},\\(k_1,\dots,k_r)\in\mathcal{I}_0,\end{array}\quad(k_r,\varepsilon_r)\neq(1,1)\right)$$

の張る $\mathbb{Q}$ 代数 (こちらが調和関係式を満たすことも簡単な計算でわかる) に入っているが, より強く次が予想されている.

予想 2.7.10 (Kaneko–Tsumura [KT, Conjecture 5.1]). シャッフル関係式によって多重 T 値全体の張る $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{T}^{\sqcup\!\sqcup}$ はともに $\mathcal{Z}$ を含む.

調和関係式によって多重 t 値の張る $\mathbb{Q}$ 代数が $\mathcal{Z}$ を含むことは [Murak, Theorem 16.2] で証明されており, より強く任意の多重ゼータ値が $t(k_1,\dots,k_r)$ $(k_1,\dots,k_r\in\{2,3\})$ の $\mathbb{Q}$ 係数線型和で書けることも言えている. 逆 (MZVs $\overset{?}{\subseteq}$ MtVs) については [Murak, Theorem 16.1] が “すべての成分が 2 以上のインデックス $\mathbf{k}$ に対し $t(\mathbf{k})\in\mathcal{Z}$ である” という部分的な回答を与えている. さらに, 多重 t 値には “微分構造が入る” という予想がなされている:

予想 2.7.11. $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\theta\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $z_{\mathbf{k}} \mapsto t(\mathbf{k})$ $(\mathbf{k} \in \mathcal{I}_0')$ と定めると, $\mathcal{T}^*$ 上の導分 d が存在して任意の $W \in \mathfrak{H}^0$ に対し $(d \circ \theta)(W) = (\theta \circ A_-)(W)$ が成り立つ. ここで $A_-\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathfrak{H}^0$ は

$$A_-(z_{\mathbf{k}}) := \begin{cases} z_{\mathbf{l}} & (\mathbf{k} = {}_{\leftarrow}\mathbf{l}\ (\exists \mathbf{l} \in \mathcal{I}_0')) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

から定まる $\mathbb{Q}$ 線型写像である.

興味深いことに, このような導分の候補として "$\log 2$ による微分" が挙げられている: たとえば

$$\theta(z_{1,4}) = t(1,4) = -\frac{1}{2}t(5) - \frac{1}{7}t(2)t(3) + t(4)\log 2 \overset{\text{“}d/d\log 2\text{”}}{\longrightarrow} t(4) = \theta(A_-(z_{1,4}))$$

となる.

最後に多重 T 値の双対性を一般化した Hirose–Iwaki–Sato–Tasaka の双対性を紹介する: 空でないインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ が $(k_r, \varepsilon_r) \neq (1,1)$ を満たすとき, 組 $\tilde{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}; \boldsymbol{\varepsilon})$ を *admissible augmented index* と呼ぶことにし,

$$z_{\tilde{\mathbf{k}}} := (-1)^r \prod_{i=1}^{r} ((-1)^{\varepsilon_i} e_z + \varepsilon_i e_1) e_0^{k_i - 1}$$

とおく. ここで右辺は $\mathfrak{H}_{(z)} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1, e_z \rangle$ の元である. $\mathfrak{H}_{(z)}$ 上の反自己同型 $\tau_{(z)}$ を $e_0 \mapsto e_z - e_1$, $e_1 \mapsto e_z - e_0$, $e_z \mapsto e_z$ から定め, $\tau_{(z)}(z_{\tilde{\mathbf{k}}}) = z_{\tilde{\mathbf{k}}^\dagger}$ が成り立つ唯一の admissible augmented index $\tilde{\mathbf{k}}^\dagger$ を $\tilde{\mathbf{k}}$ の双対と呼ぶ. このとき次が成り立つ:

定理 2.7.12 (Hirose–Iwaki–Sato–Tasaka [HIST, Theorem 1.1])**.** admissible augmented index $\tilde{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}; \boldsymbol{\varepsilon})$ に対し

$$\mathrm{Li}(\tilde{\mathbf{k}}; z) := \sum_{0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon_i + (-1)^{\varepsilon_i} z^{n_i - n_{i-1}}}{n_i^{k_i}} \qquad (\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r),\ \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r))$$

とおくと

$$\mathrm{Li}(\tilde{\mathbf{k}}; z) = \mathrm{Li}(\tilde{\mathbf{k}}^\dagger; z)$$

が成り立つ.

定義より $\mathrm{Li}(k_1, \ldots, k_r; \{1\}^r; -1) = T(k_1, \ldots, k_r)$ であるから, これは多重 T 値の双対性の一般化である. [HIST] では $\mathrm{Li}(\tilde{\mathbf{k}}; z)$ の積分表示を用いて変数変換により双対性を証明している一方で, Yamamoto [Y5] では Seki–Yamamoto [SY1] の連結和法に変数をつける形で証明がなされている ($\mathrm{Li}(\tilde{\mathbf{k}}; z)$ はもともと反復積分によって定義されており, 級数による表示も [Y5] で与えられたものである.).

2.7.3. パラメータ付き多重ゼータ値. 許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ に対し

$$Z(\mathbf{k}; \alpha) := \sum_{0 \le n_1 < \cdots < n_r} \left(\prod_{n_1 < i \le n_r} \frac{i}{\alpha + i} \right) \frac{1}{(n_1 + \alpha)^{k_1} \cdots (n_r + \alpha)^{k_r}}$$

とおく[29]. これは Igarashi [I1] によって定義された級数であり, Ohno 関係式と巡回和公式の類似が見つかっている:

定理 2.7.13 (巡回和公式; Igarashi [I1, Theorem 1.1 (i)])**.** 許容インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ が 1 でない成分を持つとき, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ に対し

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k_i - 2} Z(j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i-1]}, k_i - j; \alpha) = \sum_{i=1}^{r} Z(\mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i-1]}, k_i + 1)$$

が成り立つ[30].

定理 2.7.14 (Ohno 関係式; Igarashi [I2, Theorem 1.1])**.** 許容インデックス $\mathbf{k}$ と $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} Z(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}; \alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\dagger)} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} Z(\mathbf{k}^\dagger \oplus \mathbf{e}; \alpha)$$

が成り立つ.

[29] Seki–Yamamoto の連結和 $Z(\mathbf{k}; \mathbf{l})$ と混同してはいけない.
[30] ここでは省略するが, スター版も同論文で示されている.

2.7.4. *Mordell–Tornheim* 型多重ゼータ値. 本小々節の内容は [Q] に基づく.

定義 2.7.15 (Matsumoto [Mat, (1.4)]). 正整数 $k_1, \dots, k_r, k_{r+1}$ に対して定まる実数

$$\zeta_{\mathrm{MT}}(k_1, \dots, k_r; k_{r+1}) := \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r} (n_1 + \cdots + n_r)^{k_{r+1}}}$$

を *Mordell–Tornheim* 型多重ゼータ値 と呼ぶ.

これらは通常の多重ゼータ値 (Mordell–Tornheim 型と区別するため, 定義 2.1.1 の級数を Euler–Zagier 型とも呼ぶ.) が定義されるのに先立って Tornheim [To] や Mordell [Mo] によって $r = 2$ の場合が調べられていたようである. このケースでは Riemann ゼータ値の多項式で明示的に

$$\zeta_{\mathrm{MT}}(k, k; k) = \frac{4}{1 + 2(-1)^k} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{2k - 2i - 1}{i - 1} \zeta(2i) \zeta(3k - 2i) \qquad (k \geq 1)$$

と書けることが示されていた (Huard–Williams–Nan-Yue [HWN, Theorem 3]) が, 実は一般に多重ゼータ値の空間に入っていることがわかっている:

定理 2.7.16 (Kamano [Kam1, Remark 2.2]). 正整数 $k_1, \dots, k_r, k_{r+1}$ に対し

$$\zeta(k_1, \dots, k_r; k_{r+1}) = Z((z_{k_1} ш \cdots ш z_{k_r}) e_0^{k_{r+1}})$$

が成り立つ.

実際は Bradley–Zhou [BZ, Theorem 1.1] によって (右辺を明示しない形で) 空間の包含のみが示されていたが, 逆に任意の Euler–Zagier 型 MZV が Mordell–Tornheim 型 MZV の $\mathbb{Q}$ 係数線型和で書けるか, という問題は未解決である ([BTT2, Conjecture 2.4]). また, 以下に述べるように, 深さ (ここでは定義 2.7.15 における $r + 1$ のこととする) 3, 4 では和公式が見つかっているが, 深さ 5 では未だ解かれていない.

定理 2.7.17 (Pallewatta [P, Theorem 2.1]). 整数 $k \geq 3$ に対し

$$\sum_{(k_1, k_2, k_3) \in I(k, 3)} \zeta_{\mathrm{MT}}(k_1, k_2; k_3) = (k - 1) \zeta(k)$$

が成り立つ.

定理 2.7.18 (Pallewatta [P, Theorem 2.2]). 整数 $k \geq 3$ に対し

$$\sum_{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in I(k, 4)} \zeta_{\mathrm{MT}}(k_1, k_2, k_3; k_4) = \frac{(k - 1)(k + 4)}{4} \zeta(k)$$

が成り立つ.

予想 2.7.19 (Pallewatta [P, Conjecture]). 整数 $k \geq 2$ に対し

$$\begin{aligned} &\sum_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \in I(2k+1, 5)} \zeta_{\mathrm{MT}}(k_1, k_2, k_3, k_4; k_5) \\ &= k(2k + 3) \zeta(2k + 1) + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{k-1} (2i - 1)(2i - 2)(2 - 2^{2k+1-2i}) \zeta(2i) \zeta(2k + 1 - 2i) \end{aligned}$$

が成り立つであろう.

3. 有限多重ゼータ値

3.1. **有限多重ゼータ値の定義.** 多重調和和の定義を注意 2.3.36 に遡って思い出しておく.

定義 3.1.1. 環 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} := \left(\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) \Big/ \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right)$$

で定める. ここで p はすべての素数を渡る. 有限個の素数 p を除いて $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が与えられているとき, 例外となる素数は $a_p = 0$ など適当な値を割り振っておくことで $(a_p)_p \in \mathcal{A}$ が一意に定まる. 誤解の恐れがないとき, その元を $a_{\boldsymbol{p}}$ と書く.

$\mathcal{A}$ の元 $a_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{p}}$ が等しい必要十分条件は有限個の素数 p を除いて $a_p = b_p$ が成り立つことである. また, 有理数 r/s に対し s を割り切らない素数には $a_p = r \bmod p$ を, そうでない素数 p には $a_p = 0$ を割り当てることで単射準同型 $r/s \mapsto (a_p)_p \in \mathcal{A}$ が構成できて, これによって $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つ.

定義 3.1.2. インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\mathcal{A}$ の元

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (\zeta_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p)_p, \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (\zeta^{\star}_{<p}(\mathbf{k}) \bmod p)_p$$

を定め, それぞれ有限多重ゼータ値 (*finite multiple zeta value, FMZV*), 有限多重ゼータスター値 (*finite multiple zeta star value, FMZSV*) と呼ぶ. ここで $\zeta^{\star}_{<M}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta_{<M}(\mathbf{k}^{\star})$ とおいた.

有限多重ゼータ (スター) 値はときどき $\mathcal{A}$-多重ゼータ (スター) 値と呼ばれることもある.

定義 3.1.3. 正整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \coloneqq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \mid \operatorname{wt}(\mathbf{k}) = k\}$$

とおく. また, $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbb{Q}$ とし, 重さを問わずすべての有限多重ゼータ値が生成する空間を

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \coloneqq \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subseteq \mathcal{A}$$

を定めておく.

予想 3.1.4. 数列 d'_k を多重ゼータ値の予想次元 (定理 2.1.3 で定義したもの) としたとき

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d'_{k-3}$$

が成り立つであろう.

予想 3.1.5. 空でないインデックス $\mathbf{k}$ が存在して $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \neq 0$ となる.

Hoffman 代数の記号を用いて, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z_{\mathcal{A}} \colon \mathfrak{H}^1 \to \mathcal{A}$ を $z_{\mathbf{k}} \mapsto \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ から定める.

3.2. **有限多重ゼータ値の関係式.** 今後の利便性のため, 正整数 k に対し

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k) \coloneqq \frac{B_{\boldsymbol{p}-k}}{k} = \left(\frac{B_{p-k}}{k} \bmod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

と定める. ここから述べる定理たちは便宜上いくつかの小々節に分類しているが, その枠を飛び越えて引用することも多い. 頻繁に行き来することは面倒であるが許されたい.

3.2.1. 特殊値.

定理 3.2.1 (Hoffman [Ho4, Theorem 4.3], Zhao [Zh1, Lemma 2.2])**.** 任意の正整数 k に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 素数 p であって k が $p-1$ の倍数でないものをとる. このとき $c \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ に対し

$$c^k \zeta_{<p}(k) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}} (c^{-1}a)^{-k} = \zeta_{<p}(k)$$

であるから $(c^k - 1)\zeta_{<p}(k) = 0$ となり, 1 でない c をとることで定理を得る. □

定理 3.2.2 (Hoffman [Ho4, (15)], Zhao [Zh1, Theorem 2.13])**.** 正整数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k\}^r) = \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{k\}^r) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 対称和公式 (定理 3.2.23) において $\mathbf{k} = \{k\}^r$ とすればよい. □

補題 3.2.3. 正整数 a, b, k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{a\}^{k_1}, b, \{a\}^{k_2}) = (-1)^{(a-1)(k_1+k_2)+b} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{a\}^{k_1}, b, \{a\}^{k_2})$$

が成り立つ.

Proof. 命題 1.3.7 と調和関係式 (定理 3.2.16) より

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{a\}^{k_2},b,\{a\}^{k_1})=\sum_{l=1}^{k_1+k_2+1}\sum_{\substack{(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_l)=(\{a\}^{k_1},b,\{a\}^{k_2})\\ \mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_l\neq\varnothing}}(-1)^{k_1+k_2+1-l}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1)\cdots\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_l)$$

であるが, 右辺の和は $l>1$ のとき必ず $\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_l$ のいずれかが $\{a\}^k$ $(k\geq 1)$ の形になる. 一方で定理 3.2.2 より $\zeta_{\mathcal{A}}(\{a\}^k)=0$ なので $l=1$ の項のみが残り

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{a\}^{k_2},b,\{a\}^{k_1})=(-1)^{k_1+k_2}\zeta_{\mathcal{A}}(\{a\}^{k_1},b,\{a\}^{k_2})$$

となる. 左辺に反転公式 (系 3.2.20) を適用することで示したい等式を得る. □

定理 3.2.4 (Hoffman [Ho4, Theorem 6.1], Zhao [Zh1, Theorem 1.7])**.** 正整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2)=\zeta^\star_{\mathcal{A}}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k_1+k_2)$$

が成り立つ.

Proof. 一つ目の等号はスター値の定義と定理 3.2.1 よりわかる. さて p を十分に大きい素数としたとき Fermat の小定理と Faulhaber の公式 (命題 2.3.5) より

$$\zeta_{<p}(k_1,k_2)\overset{\mathrm{mod}\ p}{\equiv}\sum_{n_2=1}^{p-1}n_2^{-k_2}\sum_{n_1=1}^{n_2-1}n_1^{p-1-k_1}=\sum_{n_2=1}^{p-1}n_2^{-k_2}\frac{1}{p-k_1}\sum_{j=0}^{p-1-k_1}\binom{p-k_1}{j}B_jn^{p-k_1-j}$$

となるが, n_1 に関する和を考えると定理 3.2.1 と同様の議論により $p-k_1-k_2-j=0$ のケースを除いて 0 となる. したがって $j=p-k_1-k_2$ の項だけを取ると

$$\zeta_{<p}(k_1,k_2)\equiv\frac{1}{k_1}\binom{p-k_1}{k_2}B_{p-k_1-k_2}\equiv\frac{(-1)^{k_2}}{k_1+k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}B_{p-k_1-k_2}\ \mathrm{mod}\ p$$

を得る. □

定理 3.2.5 (Zhao [Zh1, Theorem 3.18 (ii)])**.** 正整数 r と正の奇数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)=\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)=0$$

が成り立つ.

Proof. スター値の定義と調和関係式 (定理 3.2.16), 定理 3.2.1 より

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)=\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)+\zeta_{\mathcal{A}}(k_1+k_2)\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^{r-1})=\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)$$

となって一つ目の等号はわかる. 二つ目の等号を r の帰納法で示す. $r=1$ のときは命題 3.2.4 より明らかで, $r-1$ のケースを仮定すると命題 1.3.7 と反転公式 (定理 3.2.20) より

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)=\sum_{l=1}^{r}\sum_{\substack{(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_l)=\{k_1,k_2\}^r\\ \mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_l\neq\varnothing}}(-1)^l\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1)\cdots\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_l)$$

となる. 右辺の和において, $l>1$ ならばある正整数 $N<r$ が存在して $\mathbf{k}_1=\{k_1,k_2\}^N$ もしくは $\mathbf{k}_1=(\{k_1,k_2\}^N,k_1)$ と書ける. 前者の場合は帰納法の仮定より $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1)=0$ となって, 後者の場合は反転公式と k_1 が奇数であることを使うと $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_1)=0$ がわかる. ゆえに結局 $l=1$ の項だけが残って

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)=-\zeta_{\mathcal{A}}(\{k_1,k_2\}^r)$$

となり, 先ほど示した一つ目の等号より結論を得る. □

定理 3.2.6 (Hoffman [Ho4, Theorem 6.2], Zhao [Zh1, Theorem 3.5])**.** 正の奇数 k と和が k になる正整数 k_1,k_2,k_3 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)=-\zeta^\star_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}\binom{k}{k_1}-(-1)^{k_3}\binom{k}{k_3}\right)\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

が成り立つ.

Proof. 命題 1.3.7 で $\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)$ として調和関係式 (定理 3.2.16) を用いることで

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)=\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)-\zeta_{\mathcal{A}}(k_1)\zeta_{\mathcal{A}}(k_2,k_3)-\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2)\zeta_{\mathcal{A}}(k_3)+\zeta_{\mathcal{A}}(k_1)\zeta_{\mathcal{A}}(k_2)\zeta_{\mathcal{A}}(k_3)$$

が成り立つ．定理 3.2.1 と系 3.2.20 を用いることで一つ目の等号がわかる．一方でスター値の定義から $\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)$ を分解して定理 3.2.1, 定理 3.2.4 を使うと

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)=\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)+\left((-1)^{k_2+k_3}\binom{k}{k_1}+(-1)^{k_3}\binom{k}{k_1+k_2}\right)\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

であるため k が奇数であることとたった今示した一つ目の等号から残りの主張を得る． □

定理 3.2.7 (Hessami-Pilehrood–Hessami-Pilehrood–Tauraso [HHT, Theorem 4.3])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})=(-1)^{k_1+k_2}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2+2}{k_1+1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k_1+k_2+2)$$

が成り立つ．

Proof. 一つ目の等号は補題 3.2.3 より従う．二つ目の等号を示す: Hoffman 双対性 (定理 3.2.21) を $\mathbf{k}=(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})$ として用いることで $\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})=-\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1+1,k_2+1)$ となり，この右辺は定理 3.2.4 より

$$-\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1+1,k_2+1)=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2+2}{k_1+1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k_1+k_2+2)$$

と計算できる． □

定理 3.2.8 (Hessami-Pilehrood–Hessami-Pilehrood–Tauraso [HHT, Theorem 4.2])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2})&=(-1)^{k_1+k_2+1}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2})\\&=\frac{4(-1)^{k_1+k_2}(k_1-k_2)}{2k_2+1}\left(1-\frac{1}{4^{k_1+k_2}}\right)\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(2k_1+2k_2+1)\end{aligned}$$

が成り立つ．

定理 3.2.9 (Hessami-Pilehrood–Hessami-Pilehrood–Tauraso [HHT, Theorem 4.1])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2})=(-1)^{k_1+k_2+1}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{2\}^{k_1},3,\{2\}^{k_2})=2(-1)^{k_1+k_2}\frac{k_1-k_2}{k_2+1}\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(2k_1+2k_2+3)$$

が成り立つ．

3.2.2. *Bowman–Bradley* 型定理．ここでは Saito–Wakabayashi [SW1] による有限多重ゼータ値の Bowman–Bradley 型定理の証明を解説する．インデックス単位のシャッフル $\widetilde{\text{Ш}}$ の定義を定理 2.3.24 に遡って思い出しておく．非負整数の組 $(k_1,k_2)\neq(0,0)$ に対し

$$L_{k_1,k_2}\coloneqq\{(a_1,\ldots,a_{k_1};b_1,\ldots,b_{k_1};c_1,\ldots,c_{k_2}\mid a_1,\ldots,a_{k_1},b_1,\ldots,b_{k_1}\ \text{は正の奇数},\ c_1,\ldots,c_{k_2}\ \text{は正の偶数}\ \}$$

と書き, $\boldsymbol{a}\in L_{k_1,k_2}$ に対し

$$I_{\boldsymbol{a}}\coloneqq\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{k_1}}(a_{\sigma(1)},b_{\tau(1)},\ldots,a_{\sigma(k_1)},b_{\sigma(k_1)})\,\widetilde{\text{Ш}}\,(c_1)\,\widetilde{\text{Ш}}\cdots\widetilde{\text{Ш}}\,(c_{k_2})$$

とおく[31]．また, 任意の $\boldsymbol{a}\in L_{k_1,k_2}$ に対し $\zeta_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})=\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})=0$ が成り立つ, という命題を P_{k_1,k_2} と書く．

補題 3.2.10 (Saito–Wakabayashi [SW1, Lemma 2.2])**.** 正整数 k_1 に対し $P_{k_1,0}$ が正しいならば任意の非負整数 k_2 に対し P_{k_1,k_2} は正しい．

Proof. k_2 の帰納法で示す．始点は仮定より問題ない．調和積の定義より

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_{k_1};b_1,\ldots,b_{k_1};c_1,\ldots,c_{k_2})\in L_{k_1,k_2}$$

に対し

$$(a_1,b_1,\ldots,a_{k_1},b_{k_2})*((c_1)\,\widetilde{\text{Ш}}\cdots\widetilde{\text{Ш}}\,(c_{k_2}))$$

[31]以後も対称群の元として τ という記号を用いることがあるが, 双対インデックスの定義を述べるのに用いた $\mathfrak{H}$ の反自己同型 τ や補間多重ゼータ値で用いた形式的変数 τ と混同してはならない．

$$= \sum_{X\subseteq\{1,\dots,2k_1\}} \sum_{\substack{f\colon X\to\{1,\dots,k_2\}\\ \text{単射}}} (a_1+d_1, b_1+d_{k_1+1}, \dots, a_{k_1}+d_{k_1}, b_{k_1}+d_{2k_1})\,\widetilde{\text{Ш}}\,(e_1)\,\widetilde{\text{Ш}}\cdots\widetilde{\text{Ш}}\,(e_{k_2})$$

である. ここで

$$d_i = \begin{cases} c_{f(i)} & (i\in X) \\ 0 & (i\notin X) \end{cases}, \qquad e_j = \begin{cases} c_j & (j\notin f(X)) \\ 1 & (j\in f(X)) \end{cases}$$

とおいた. 両辺で a_i, b_i を $a_{\sigma(i)}$, $b_{\sigma(i)}$ に置き換え, $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{k_1}$ 全体で和を取ることで

$$\begin{aligned} &I_{(a_1,\dots,a_{k_1};b_1,\dots,b_{k_1};\varnothing)} * ((c_1)\,\widetilde{\text{Ш}}\cdots\widetilde{\text{Ш}}\,(c_{k_2})) \\ &= \sum_{X\subseteq\{1,\dots,2k_1\}} \sum_{\substack{f\colon X\to\{1,\dots,k_2\}\\ \text{単射}}} I_{(a_1+d_1,\dots,a_{k_1}+d_{k_1};b_1+d_{k_1+1},\dots,b_{k_1}+d_{2k_1};e_1,\dots,e_{k_2})} \\ &= I_{\boldsymbol{a}} + \sum_{\varnothing\neq X\subseteq\{1,\dots,2k_1\}} \sum_{\substack{f\colon X\to\{1,\dots,k_2\}\\ \text{単射}}} I_{(a_1+d_1,\dots,a_{k_1}+d_{k_1};b_1+d_{k_1+1},\dots,b_{k_1}+d_{2k_1};e_1,\dots,e_{k_2})} \end{aligned}$$

となる. 最後の和にある $((a_1+d_1,\dots,a_{k_1}+d_{k_1};b_1+d_{k_1+1},\dots,b_{k_1}+d_{2k_1};e_1,\dots,e_{k_2}))$ はいずれも $L_{k_1,k_2'}$ $(k_2'<k_2)$ の元であるため, 帰納法の仮定により $\zeta_{\mathcal{A}}$, $\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}$ での像が 0 になる. 一方で左辺は調和関係式 (定理 3.2.16) と対称和公式 (3.2.23) より 0 になるため補題を得る □

補題 3.2.11 (Saito–Wakabayashi[32] [SW1, Lemma 2.3])**.** 正整数 k_1 に対し, $0<k_1'<k_1$ の範囲で $P_{k_1',0}$ が正しいならば任意の $\boldsymbol{a}\in L_{k_1,0}$ に対し $\zeta_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})+\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a})=0$ が成り立つ.

Proof. 正整数 k_1 に対し $I_{k_1,0}$ の元 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_{k_1};b_1,\dots,b_{k_1};\varnothing)$ を任意にとり, $i\in\{0,\dots,k_1\}$ に対し

$$\begin{aligned} P_i(\boldsymbol{a}) &\coloneqq \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{k_1}} \zeta_{\mathcal{A}}(a_{\sigma(1)},b_{\tau(1)},\dots,a_{\sigma(i)},b_{\tau(i)})\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(b_{\tau(k_1)},a_{\sigma(k_1)},\dots,b_{\tau(i+1)},a_{\sigma(i+1)}), \\ Q_i(\boldsymbol{a}) &\coloneqq \delta_{i,0}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{k_1}} \zeta_{\mathcal{A}}(a_{\sigma(1)},b_{\tau(1)},\dots,a_{\sigma(i-1)},b_{\tau(i-1)},a_{\sigma(i)})\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(b_{\tau(k_1)},a_{\sigma(k_1)},\dots,b_{\tau(i+1)},a_{\sigma(i+1)},b_{\tau(i)}) \end{aligned}$$

とおく. このとき対蹠関係式 (定理 3.2.17) を符号に応じて分けることで

$$\sum_{i=0}^{k_1} P_i(I_{\boldsymbol{a}}) - \sum_{i=1}^{k_1} Q_i(I_{\boldsymbol{a}}) = 0$$

となる. 定義より明らかに $P_0(\boldsymbol{a})=\zeta_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})$ であり, 反転公式 (定理 3.2.20) により $P_{k_1}(\boldsymbol{a})=\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})$ である ($\mathrm{wt}(I_{\boldsymbol{a}})$ が偶数であることに注意) ことから, 示すべきことは $P_i=0$ $(i\in\{1,\dots,k_1-1\})$ と $Q_i=0$ $(i\in\{1,\dots,k_1\})$ となる. 前者は

$$\begin{aligned} P_i = \sum_{\substack{A\sqcup A^{\star}=B\sqcup B^{\star}=\{1,\dots,k_1\}\\ |A|=|B|=i}} &\left(\sum_{\substack{\sigma'\colon\{1,\dots,i\}\to A\\ \tau'\colon\{1,\dots,i\}\to B\\ \text{全単射}}} \zeta_{\mathcal{A}}(a_{\sigma'(1)},b_{\tau'(1)},\dots,a_{\sigma'(i)},b_{\tau'(i)}) \right) \\ &\cdot \left(\sum_{\substack{\sigma'\colon\{i+1,\dots,k_1\}\to A^{\star}\\ \tau'\colon\{i+1,\dots,k_1\}\to B^{\star}\\ \text{全単射}}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(a_{\sigma'(i+1)},b_{\tau'(i+1)},\dots,a_{\sigma'(k_1)},b_{\tau'(k_1)}) \right) \end{aligned}$$

と計算できるが, 補題の仮定によりこれは 0 になる. 後者も同様に分解し, 反転公式を用いることで a,b が奇数であることより 0 になることがわかる. □

補題 3.2.12 (Saito–Wakabayashi [SW1, Lemma 2.4])**.** 正整数 k_1 に対し, $0<k_1'<k_1$ と $k_2\geq 0$ の範囲で P_{k_1',k_2} が正しいならば任意の $\boldsymbol{a}\in L_{k_1,0}$ に対し $\zeta_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})=\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(I_{\boldsymbol{a}})$ が成り立つ.

---

[32]原論文では $P_{k_1',0}$ だけでなく任意の $k_2\geq 0$ に対し P_{k_1,k_2} を仮定しているが, 証明を見る限りそこまでは必要ないように思える. どちらであっても主定理の証明に差し支えはない.

Proof. 正整数 k_1 と $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{k_1}; b_1, \ldots, b_{k_1}; \varnothing) \in I_{k_1,0}$ をとる. 定義より

$$I^\star_{\boldsymbol{a}} = \sum_{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_{k_1}} \sum_{\circ :, \text{ or } +} (a_{\sigma(1)} \circ b_{\tau(1)} \circ \cdots \circ a_{\sigma(k_1)} \circ b_{\tau(k_1)})$$

であるが, 右辺の和において $\circ$ が $+$ になることで隣り合う成分がどのように足し合わされるかを考える: 現れるインデックスの成分は

$$\begin{gathered} a_{\sigma(i)} + b_{\tau(i)} + \cdots + b_{\sigma(i+j-1)} + a_{\sigma(i+j)}, \\ b_{\tau(i)} + a_{\sigma(i+1)} + \cdots + a_{\sigma(i+j)} + b_{\sigma(i+j)}, \\ a_{\sigma(i)} + b_{\tau(i)} + \cdots + a_{\sigma(i+j)} + b_{\sigma(i+j)} \end{gathered}$$

のいずれかの形になる. 一つ目は a_u たちの方が一つ多く, 二つめは b_u たちの方が一つ多く, 三つ目は現れる a_u たちと b_u たちの数が等しい. これを集合のことばに翻訳する: $M \geq 0$ に対し, 集合

$$A_1, \ldots, A_M, B_1, \ldots, B_M, C_1, \ldots, C_{2M+1}$$

であって, 次の条件を満たすものを考える[33].

- $\{A_1, \ldots, A_M, B_1, \ldots, B_M, C_1, \ldots, C_{2M+1}\}$ のいずれの要素も共通部分を持たない.
- 任意の $1 \leq i \leq M$ に対し A_i, B_i は空でない.
- $$\left(\bigsqcup_{i=1}^{M} (A_i \sqcup B_i)\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{2M+1} (C_i)\right) = \{(0,1), \ldots, (0,k_1), (1,1), \ldots, (1,k_1)\}.$$
- 任意の $1 \leq i \leq M$ に対し $|\{j \mid (0,j) \in A_i\}| = |\{j \mid (1,j) \in A_i\}| + 1$.
- 任意の $1 \leq i \leq M$ に対し $|\{j \mid (0,j) \in B_i\}| + 1 = |\{j \mid (1,j) \in B_i\}|$.
- 任意の $1 \leq i \leq 2M+1$ に対し $|\{j \mid (0,j) \in C_i\}| = |\{j \mid (1,j) \in C_i\}|$.

このような性質を満たす集合全体の和を取るとき単に $\sum_{A_i,B_i,C_i}$ と書くことにし, $\circ \in \{A, B, C\}$ に対し

$$\mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{\circ_i} := \begin{cases} \left(\sum_{(\varepsilon,j)\in \circ_i} (\delta_{\varepsilon,0} a_{\sigma(j)} + \delta_{\varepsilon,1} b_{\tau(j)})\right) & (\circ_i \neq \varnothing) \\ \varnothing & (\circ_i = \varnothing) \end{cases}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} &\sum_{\circ :, \text{ or } +} (a_{\sigma(1)} \circ b_{\tau(1)} \circ \cdots \circ a_{\sigma(k_1)} \circ b_{\tau(k_1)}) \\ &= \sum_{M=0}^{k_1} \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_M \\ B_1,\ldots,B_M \\ C_1,\ldots,C_{2M+1}}} (\mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{C_1}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{A_1}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{C_2}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{B_1}, \ldots, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{C_{2M-1}}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{A_M}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{C_{2M}}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{B_M}, \mathbf{l}^{\sigma,\tau}_{C_{2M+1}}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_{k_1}} \sum_{\circ :, \text{ or } +} (a_{\sigma(1)} \circ b_{\tau(1)} \circ \cdots \circ a_{\sigma(k_1)} \circ b_{\tau(k_1)}) \\ &= \sum_{M=0}^{k_1} \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_M \\ B_1,\ldots,B_M \\ C_1,\ldots,C_{2M+1}}} \left(\prod_{i=1}^{M} Q(A_i) Q(B_i)\right) \\ &\quad \cdot \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_M \\ \rho \in \mathfrak{S}_{2M+1}}} (\mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{\rho(1)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{A_{\sigma(1)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{\rho(2)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{B_{\tau(1)}}, \ldots, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{\rho(2M-1)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{A_{\sigma(M)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{\rho(2M)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{B_{\tau(M)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{\rho(2M+1)}}) \\ &= \sum_{M=0}^{k_1} \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_M \\ B_1,\ldots,B_M \\ C_1,\ldots,C_{2M+1}}} \left(\prod_{i=1}^{M} Q(A_i) Q(B_i)\right) \sum_{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_M} (\mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{A_{\sigma(1)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{B_{\tau(1)}}, \ldots, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{A_{\sigma(M)}}, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{B_{\tau(M)}}) \,\widetilde{ш}\, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_1} \,\widetilde{ш}\, \cdots \,\widetilde{ш}\, \mathbf{l}^{\mathrm{id},\mathrm{id}}_{C_{2M+1}} \end{aligned}$$

[33] C_i には空集合を許すので, $\{(0,1), \ldots, (0,k_1), (1,1), \ldots, (1,k_1)\}$ の分割になるとは限らない.

である．ここで

$$Q(X) \coloneqq |\{j \mid (0,j) \in X\}|!|\{j \mid (1,j) \in X\}|!$$

とおいた．さて右辺の和において $M = k_1$ のとき和の中身は $I_{\boldsymbol{a}}$ に他ならず, $0 \le M \le k_1 - 1$ のときは和の中身が $I_{M,j}$ $(0 \le j \le 2M+1)$ の元であるから, 両辺に写像 $\zeta_{\mathcal{A}}$ を適用することで補題の仮定より結論を得る． □

定理 3.2.13 (Saito–Wakabayashi [SW1, Theorem 1.6])**.** 非負整数の組 $(k_1, k_2) \neq (0,0)$ に対し P_{k_1,k_2} が正しい．

Proof. 対称和公式 (命題 3.2.23) より任意の $k_2 \ge 1$ に対し P_{0,k_2} は正しい．正整数 k_1 の帰納法を用いて任意の $k_2 \ge 0$ に対し P_{k_1,k_2} が成り立つことを示す．始点 $P_{1,0}$ は定理 3.2.1 より正しく, ゆえに補題 3.2.10 により P_{1,k_2} $(k_2 \ge 0)$ は正しい．正整数 k_1 を固定し, 任意の $1 \le k_1' < k_1$ と $k_2 \ge 0$ に対し P_{k_1',k_2} が正しいとすると補題 3.2.11 と補題 3.2.12 によって $P_{k_1,0}$ が成り立つ．したがって補題 3.2.10 により P_{k_1,k_2} がいえた． □

系 3.2.14 (Bowman–Bradley 型定理; Saito–Wakabayashi [SW2, Theorem 1.4])**.** 非負整数の組 $(k_1, k_2) \neq (0,0)$ と正の奇数 a, b, 正の偶数 c に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1} \ge 0 \\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta_{\mathcal{A}}(\{c\}^{n_1}, a, \{c\}^{n_2}, b, \dots, \{c\}^{n_{2k_1-1}}, a, \{c\}^{n_{2k_1}}, b, \{c\}^{2k_1+1}) \\
&= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1} \ge 0 \\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\{c\}^{n_1}, a, \{c\}^{n_2}, b, \dots, \{c\}^{n_{2k_1-1}}, a, \{c\}^{n_{2k_1}}, b, \{c\}^{2k_1+1}) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. 定理 3.2.13 において $\boldsymbol{a} = (\{a\}^{k_1}; \{b\}^{k_1}; \{c\}^{k_2})$ とすればわかる． □

3.2.3. *Le–Murakami/Aoki–Ohno* 型関係式.

定理 3.2.15 (Le–Murakami/Aoki–Ohno 型関係式; Kaneko–Oyama–Saito [KOS, Theorem 1.1])**.** 正整数 k, s $(k \ge 2s)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,-,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,-,s)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\binom{k-1}{2s-1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

が成り立つ．

3.2.4. 複シャッフル関係式.

定理 3.2.16 (調和関係式)**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \mathbin{\bar{*}} \mathbf{l}) = \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{l})$$

が成り立つ．

Proof. 注意 2.3.36 より従う． □

系 3.2.17 (対蹠関係式)**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^j \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{[i]}) \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}) = \delta_{\mathbf{k},\varnothing}$$

が成り立つ．

Proof. 定理 3.2.16 と系 1.3.6 より従う． □

補題 3.2.18 (Seki [Se5, Lemma 2.5])**.** $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$S^1(w)S^1(w') = S^1(ww' - we_0L_{e_1}^{-1}(w'))$$

が成り立つ．ここで $L_{e_1}^{-1}$ は先頭の e_1 を除去する写像 (定数なら 0 に送る) である．

定理 3.2.19 (シャッフル関係式; Kaneko–Zagier [KZ], Ono [On1, Corollary 4.1], Seki [Se4, Proposition 3.2])**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}}), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \,\overline{ш}\, \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}(\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}}) - \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \uplus \overleftarrow{\mathbf{l}}))$$

が成り立つ. ここでインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r), \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$ に対し

$$\mathbf{k} \uplus \mathbf{l} = \delta_{r,0}(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + l_1, l_2, \dots, l_s)$$

とおいた.

Proof by Kaneko–Zagier. 定理 3.4.13 の Seki による証明で p 進展開を $\bmod p$ に置き換えたものである. □

Proof by Seki. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r), \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s), \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_c)$ $(r, s \geq 1,\, c \geq 0)$ と正整数 N に対し

$$Z^{ш}_N(\mathbf{k}; \mathbf{l}; \mathbf{h}) = \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ 0<n_1<\cdots<n_s \\ m_r+n_s=r_1<\cdots<r_c\leq N}} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i^{k_i}}\right) \cdot m_r n_s r_1 \left(\prod_{f=1}^{c} \frac{1}{r_f^{h_f}}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{n_j^{l_j}}\right)$$

とおくと, 部分分数分解

$$\frac{1}{mn} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{m+n}$$

によって

$$Z^{ш}_N(\mathbf{k}; \mathbf{l}; \mathbf{h}) = Z^{ш}_N(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \mathbf{h})$$
$$Z^{ш}_N(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}_{\uparrow}; \mathbf{h}) = Z^{ш}_N(\mathbf{k}; \mathbf{l}_{\uparrow}; \mathbf{h}_{\uparrow}) + Z^{ш}_N(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}; \mathbf{h}_{\uparrow})$$
$$Z^{ш}_N(\mathbf{k}_{\rightarrow}; \mathbf{l}; {}_{\uparrow}\mathbf{h}) = Z^{ш}_N(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}; {}_{\leftarrow}\mathbf{h})$$

が成り立つ. $Z^{ш}_{p-1}(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}_{\uparrow}; 1)$ から初めてこれらを繰り返し使うことで $\zeta_{<p}(\mathbf{k} ш \mathbf{l})$ に落ち着き, 一方で境界条件

$$Z^{ш}_{p-1}(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}_{\uparrow}; 1) \equiv (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{<p}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}}) \pmod{p}$$

を適用することで証明が完成する. スター側の証明は補題 3.2.18 と $(\overleftarrow{\mathbf{k}})^{\star} = \overleftarrow{\mathbf{k}^{\star}}$ よりわかる. □

系 3.2.20 (反転公式)**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\overleftarrow{\mathbf{k}}), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\overleftarrow{\mathbf{k}})$$

が成り立つ.

3.2.5. *Hoffman* 双対性.

定理 3.2.21 (Hoffman 双対性; Hoffman [Ho4, Theorem 4.6], Bachmann–Takeyama–Tasaka [BTT1, Theorem 2.15], Yamamoto [Y3, Theorem 1.1], Seki–Yamamoto [SY2, Corollary 2.3])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = -\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{\vee})$$

が成り立つ.

Proof by Seki–Yamamoto. 連結和法によって証明する: 正整数 N, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r), \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$ に対し

$$Z_N(\mathbf{k}; \mathbf{l}) \coloneqq \sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_r\leq n_1\leq\cdots\leq n_s\leq n_{s+1}=N} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \cdot (-1)^{m_r-1} m_r \binom{n_1}{m_r} \frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}$$

と定めると, 非負整数 m, n に対し

$$\sum_{m\leq a\leq n} \frac{1}{a} \cdot (-1)^{a-1} a \binom{n}{a} = \frac{1}{n}(-1)^{m-1} m \binom{n}{m}, \qquad \frac{1}{m} \cdot (-1)^{m-1} m \binom{n}{m} = \sum_{m\leq a\leq n} \frac{1}{a}(-1)^{m-1} m \binom{a}{m}$$

が成り立つことから

$$Z_N(\mathbf{k}_{\rightarrow}; \mathbf{l}) = Z_N(\mathbf{k}; {}_{\uparrow}\mathbf{l}) \qquad (\mathbf{l} \neq \varnothing),$$
$$Z_N(\mathbf{k}_{\uparrow}; \mathbf{l}) = Z_N(\mathbf{k}; {}_{\leftarrow}\mathbf{l}) \qquad (\mathbf{k} \neq \varnothing)$$

となる. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対しこれらの関係式を $Z_N(\mathbf{k}_\uparrow;\varnothing)$ へ繰り返し適用することで

$$\sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_r\leq N}\frac{(-1)^{m_r-1}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\binom{N}{m_r}=Z_N(\mathbf{k}_\uparrow;\varnothing)=\cdots=Z_N(1;\mathbf{k}^\vee)=\zeta_{<N+1}(\mathbf{k}^\vee)$$

となり, $N=p-1$ とすることで定理を得る. □

注意 3.2.22. Hoffman はこの双対性が次の主張と同値であることを示している: インデックス $\mathbf{k}$ を縮約インデックスに持つようなインデックスすべての形式的線型和を $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ と書く, つまり

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}\preceq\mathbf{l}}\mathbf{l}$$

としたとき

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\tilde{\phi}(\mathbf{k}))$$

である.

3.2.6. 和公式.

定理 3.2.23 (対称和公式; Hoffman [Ho4, Theorem 4.4])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta_{\mathcal{A}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta^\star_{\mathcal{A}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)})=0$$

が成り立つ.

Proof. Hoffman 代数のレベルで成り立つ (命題 1.3.8) の両辺に $\zeta_{\mathcal{A}}$ を適用することで定理 3.2.1 よりわかる. □

以後 $?\in\{\varnothing,\star\}$ とし, 正整数 k, r, i $(i\leq r<k)$ に対し

$$I_i(k,r)=\{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq1}^r\mid\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ k_i\geq2\},$$

$$S^?_{1;k,r,i}\coloneqq\sum_{\mathbf{k}\in I_i(k,r)}\zeta^?_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\qquad b_{1;k,r,i}\coloneqq(-1)^i\left(\binom{k-1}{i-1}+(-1)^r\binom{k-1}{r-i}\right)$$

とおく.

補題 3.2.24 (Saito–Wakabayashi [SW1, Proposition 2.2])**.** 整数 $1\leq i<r<k$ に対し

$$(r-i)S_{1;k,r,i}+iS_{1;k,r,i+1}+(k-r)S_{1;k,r-1,i}=(r-i)S^\star_{1;k,r,i}+iS^\star_{1;k,r,i+1}-(k-r)S^\star_{1;k,r-1,i}=0$$

が成り立つ.

Proof. ε を $?=\varnothing$ なら 1, $?=\star$ なら -1 をとる符号とする. 調和関係式 (定理 3.2.16) において片側の深さを 1 にとると, 正整数 $k_1,\dots,k_{r-1},l$ に対し

$$\sum_{j=1}^{r}\zeta^?_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_{j-1},l,k_j,\dots,k_{r-1})+\varepsilon\sum_{j=1}^{r-1}\zeta^?_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_j+l,\dots,k_{r-1})=0$$

である. 第一項において $(k_1,\dots,k_{r-1},l)\in I_i(k,r)$ で和を取ると $(r-i)S^?_{1;k,r,i}+iS^?_{1;k,r,i+1}$ となる. 第二項から ε を除いたもので同じ和を取って $(k-r)S^?_{1;k,r-1,i}$ になることを示せばよい. 写像

$$I_{k,r,i}\times\{1,\dots,r-1\}\ni((k_1,\dots,k_{r-1},l),j)\mapsto(k_1,\dots,k_j+l,\dots,k_{r-1})\in I_{k,r-1,i}$$

において $(l_1,\dots,l_{r-1})\in I_{k,r-1,i}$ のファイバーを評価する: i に一致しない $j\in\{1,\dots,r-1\}$ に対しては l_j に来るのが $(k_j,l)\in\{(l_j-1,1),\dots,(1,l_j-1)\}$ の l_i-1 個であり, l_i に来るのは $(k_i,l)\in\{(l_i-1,1),\dots,(2,l_i-2)\}$ の l_i-2 個であるから実際は

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,\dots,k_{r-1},l)\in I_i(k,r)}\sum_{j=1}^{r-1}\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_j+l,\dots,k_{r-1})\\&=\sum_{(l_1,\dots,l_{r-1})\in I_{k,r-1,i}}\left(l_i-2+\sum_{j\in\{1,\dots,r-1\}\setminus\{i\}}(l_j-1)\right)\zeta(l_1,\dots,l_{r-1})\\&=(k-r)S^?_{1;k,r-1,i}\end{aligned}$$

となる. □

定理 3.2.25 (和公式; Saito–Wakabayashi [SW1, Theorem 1.4]). 正整数 $1 \le i \le r < k$ に対し

$$S_{1;k,r,i} = (-1)^r S^{\star}_{1;k,r,i} = (-1)^i \left(\binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right) \mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

が成り立つ.

Proof. まず補題 3.2.24 を用いてスターのない側を r の backward induction で示す. 補題 3.2.8 より

$$S_{1;k,k-1,i} = \zeta_{\mathcal{A}}(\{1\}^{i-1}, 2, \{1\}^{k-i-1}) = (-1)^{k-i-1} \binom{k}{i} \mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

であるが, k が偶数ならば $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k) = 0$ なのでよく, k が奇数でも

$$b_{1;k,k-1,i} = (-1)^i \left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right) = (-1)^i \binom{k}{i} \mathfrak{Z}_{\mathcal{A}}(k)$$

となって確かめられる. さて一般の r では補題 3.2.24 より

$$(r-i) b_{1;k,r,i} + i b_{1;k,r,i+1} + (k-r) b_{1;k,r-1,i} = 0$$

を示せば十分であるが, これは

$$\begin{aligned}
&(r-i) b_{1;k,r,i} + i b_{1;k,r,i+1} + (k-r) b_{1;k,r-1,i} \\
&= (-1)^i (r-i) \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{i+r} (r-i) \binom{k-1}{r-i} + (-1)^{i+1} i \binom{k-1}{i} \\
&\quad + (-1)^{i+1+r} i \binom{k-1}{r-i-1} + (-1)^i (k-r) \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{i+r-1} (k-r) \binom{k-1}{r-i-1} \\
&= (-1)^i (r-i) \binom{k-1}{i-1} + (-1)^i (k-r) \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{i+1} (k-i) \binom{k-1}{i-1} \\
&\quad + (-1)^{i+r} (k-r+i) \binom{k-1}{r-i-1} + (-1)^{i+1+r} i \binom{k-1}{r-i-1} + (-1)^{i+r-1} (k-r) \binom{k-1}{r-i-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

と計算できる. スター側も初期条件は定理 3.2.8 より同様に確かめられ, ゆえに再び補題 3.2.24 より $b^{\star}_{1;k,r,i} \coloneqq (-1)^r b_{1;k,r,i}$ に対し

$$(r-i) b^{\star}_{1;k,r,i} + i b^{\star}_{1;k,r,i+1} - (k-r) b^{\star}_{1;k,r-1,i} = 0$$

を示せばよいことになるが, これはたった今示したことである. □

注意 3.2.26. 定理 3.2.25 にあるような和の条件 $k_i \ge 2$ を除去した和公式 (今後は条件ありのものを *i-admissible sum formula*, ないものを *full sum formula* と呼ぶことにする) は, $\mathcal{A}$ の場合は 0 になる, 即ち

$$\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 0$$

となることが対称和公式 (定理 3.2.23) よりわかる. なお, より一般 (superbity が 2 より大きい場合, §3.3 を参照) の場合では 0 になるとは限らないことが最近発見されている (定理 3.4.10, 定理 3.4.9). なお, 一般の i に対する補間版 i-admissible sum formula は未解決問題である ([Se1, Conjecture 5.21]).

3.2.7. 導分関係式.

定理 3.2.27 (導分関係式; Murahara [Murah2, Theorem 2.1], Horikawa–Murahara–Oyama [HoMuOy, §5]). 導分 ∂_h を多重ゼータ値の導分関係式 (定理 2.3.27) で定義したものとし, $w' \in \mathfrak{H}$ に対し $\mathbb{Q}$ 線型写像 $R_{w'} \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $w \mapsto ww'$ で定める. このとき任意の $w \in \mathfrak{H}^0 \setminus \mathbb{Q}$ と正整数 h に対し

$$(Z_{\mathcal{A}} \circ R_{e_0}^{-1} \circ \partial_h)(w) = 0$$

が成り立つ.

Proof by Horikawa–Murahara–Oyama. Hoffman 双対性の同値な言い換え (注意 3.2.22) によって任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し $Z_{\mathcal{A}}(w) = Z_{\mathcal{A}}(\phi(w))$ であることがわかる (ϕ は定理 2.3.30 で導入した $\mathfrak{H}$ 上の自己同型である.). ここで w を $(R_{e_0}^{-1} \circ \partial_h \circ R_{e_0})(w)$ に置き換えることで, 結局

$$(Z_{\mathcal{A}} \circ \phi \circ R_{e_0}^{-1} \circ \partial_h \circ R_{e_0})(w) = 0$$

を示せば十分となる. ここで正整数 h に対し $\mathfrak{H}$ 上の導分 δ_h を $e_0 \mapsto 0$ と $e_1 \mapsto e_1 e_0^{h-1}(e_0 + e_1)$ で定めると, 調和積の定義より $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$(R_{e_0+e_1}^{-1} \circ \delta_h \circ R_{e_0+e_1})(w) = w * z_h$$

が成り立つことがわかる. 実際 $w = z_{k_1,\ldots,k_r}$ とすれば左辺は

$$\begin{aligned} R_{e_0+e_1}^{-1}(wz_h(e_0+e_1) + \delta_h(w)(e_0+e_1)) &= wz_h + \sum_{i=1}^{r} z_{\mathbf{k}_{[i-1]}} z_h (e_0+e_1) e_0^{k_i-1} z_{\mathbf{k}^{[i]}} \\ &= wz_h + \sum_{i=1}^{r} \bigl(z_{\mathbf{k}_{[i-1]}} z_{h+k_i} z_{\mathbf{k}^{[i]}} + z_{\mathbf{k}_{[i-1]}} z_h z_{\mathbf{k}^{[i-1]}} \bigr) \\ &= z_{\mathbf{k}} * z_h \end{aligned}$$

となる. さて ϕ が自己同型, δ_h が導分なので $\phi \circ \delta_h \circ \phi$ は導分であり, 生成元の移り先を調べることでこれが $-\partial_h$ に一致することがわかる. この事実と ϕ^2 が恒等写像であること, 等式 $\phi \circ R_{e_0}^{-1} = R_{e_0+e_1}^{-1} \circ \phi$ を使うことで $W \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$(\phi \circ R_{e_0}^{-1} \circ \partial_h \circ R_{e_0})(w) = -(R_{e_0+e_1}^{-1} \circ \delta_h)(\phi(w)(e_0+e_1)) = -\phi(w) * z_h$$

が成り立ち, 両辺に $Z_{\mathcal{A}}$ を適用することで定理 3.2.1 と調和関係式 (定理 3.2.16) より 0 になることがわかる. □

定理 3.2.28 (Quasi-derivation relation; Kaneko–Murahara–Murakami [KMM, Theorem 4.1]). 任意の $w \in \mathfrak{H}^0 \setminus \mathbb{Q}$ と正整数 h, 有理数 c に対し

$$(Z_{\mathcal{A}} \circ R_{e_0}^{-1} \circ \partial_h^{(c)})(w) = Z_{\mathcal{A}}(R_{e_0}^{-1}(W)) Z_{\mathcal{A}}(q_h^{(c)})$$

が成り立つ.

3.2.8. *Ohno* 関係式系統.

定理 3.2.29 (Ohno 型関係式; Oyama [Oy, Theorem 1.4]). インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r = \mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s = \mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} \zeta_{\mathcal{A}}((\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e})^\vee)$$

が成り立つ.

注意 3.2.30. Horikawa–Murahara–Oyama [HoMuOy, Theorem 3.4] がこれと定理 3.2.27 の同値性を示している.

定理 3.2.31 (スター Ohno 型関係式; Hirose–Imatomi–Murahara–Saito [HIMS, Theorem 1.4], Seki–Yamamoto [SY2, Corollary 2.3]). インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r = \mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s = \mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} b_2(\mathbf{k}; \mathbf{e}) \zeta_{\mathcal{A}}^\star(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = -\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = h}} \zeta_{\mathcal{A}}^\star(\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e})$$

が成り立つ. ここで

$$b_2(k_1, \ldots, k_r; e_1, \ldots, e_r) = \prod_{i=1}^{r} \binom{k_i + e_i + \delta_{i,1} + \delta_{i,r} - 2}{e_i}, \qquad \binom{n-1}{n} = \delta_{n,0}$$

とおいた.

定理 3.2.32 (二重 Ohno 関係式; Hirose–Murahara–Onozuka–Sato [HMOS, Theorem 2.7]). 非負整数 k_1, n_1, ..., n_{2k_1+1} に対し

$$\mathbf{k} = (\{2\}^{n_1}, 1, \{2\}^{n_2}, 3, \ldots, \{2\}^{n_{2k_1-1}}, 1, \{2\}^{n_{2k_1}}, 3, \{2\}^{n_{2k_1+1}})$$

とおき, $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{wt}(\mathbf{k})-r$ と書く. このとき非負整数 h_1,h_2 に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h_1\\ \mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=h_2}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\downarrow}\oplus\mathbf{e}\oplus\mathbf{f})=\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{s}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h_1\\ \mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{s}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=h_2}}\zeta_{\mathcal{A}}(((\mathbf{k}_{\downarrow})^{\vee}\oplus\mathbf{e}\oplus\mathbf{f})^{\vee})$$

が成り立つ.

定理 3.2.33 (Hirose–Murahara–Saito [HMS1, Theorem 1.4]). インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$O_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\coloneqq\sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}}\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})t^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{wt}(\mathbf{e})}+\sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}^{\vee})}}(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}^{\vee}\oplus\mathbf{e})t^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{wt}(\mathbf{e})}\in\mathcal{A}[\![t]\!]$$

とおき, 正整数 k,i に対し

$$F_{\mathcal{A};k,i}(t)\coloneqq\sum_{n=k+i+1}^{\infty}\left((-1)^{k}\binom{n-1}{k-1}-(-1)^{i}\binom{n-1}{i-1}\right)\frac{B_{\boldsymbol{p}-n}}{n}t^{n}\in\mathcal{A}[\![t]\!]$$

と定める. このとき正整数 k_1,k_2,k_3 に対し

$$O_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,k_3)=\delta_{k_2,1}F_{\mathcal{A};k_1,1}(t)F_{\mathcal{A};k_3,1}(t)-\sum_{i=2}^{k_2-1}F_{\mathcal{A};k_1,i}(t)F_{\mathcal{A};k_3,k_2+1-i}(t)$$

が成り立つ.

3.2.9. 巡回和公式.

定理 3.2.34 (巡回和公式; Kawasaki–Oyama [KO, Theorem 1.2]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta_{\mathcal{A}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)\\&=\sum_{i=1}^{r}\Bigl(\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1)+\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)+\zeta_{\mathcal{A}}(k_i+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]})+\zeta_{\mathcal{A}}(1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})\Bigr),\\&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)=\sum_{i=1}^{r}\Bigl(\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)+\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})\Bigr)\end{aligned}$$

が成り立つ.

3.2.10. 重み付き和公式.

定理 3.2.35 (一般化重み付き和公式; Kamano [Kam2, Main Theorem]). 正整数 k,r と不定元 x_1, x_2, y_1, y_2 に対し

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq j\leq r}}((-1)^{k+r-i-j}x_1^{i}x_2^{k-i}y_1^{j}y_2^{r-j}+(x_1^{i}y_1^{j}+x_2^{i}y_2^{j})(x_1+x_2)^{k-i}(y_1+y_2)^{r-j})\sum_{\substack{\mathbf{k}\in I(i+j+1,i+1)\\ \mathbf{l}\in I(k+r-i-j+1,k-i+1)}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k},\mathbf{l})=0$$

が成り立つ.

定理 3.2.36 (Hirose–Murahara–Saito [HMS2, Theorem 2]). 正整数 k,r,i (r は奇数, $1\leq i\leq r$) に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in I(k,r)}2^{k_i}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in I(k,r)}2^{k_i}\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k})=0$$

が成り立つ.

予想 3.2.37 (Hirose–Murahara–Saito [HMS2, Conjecture 11]). 正整数 k,r と有理数 a,b に対し

$$\sum_{\mathbf{k}=(k_0,\ldots,k_r)\in I(k,r)}\left((b^{k_0}-a^{k_0})\prod_{i=1}^{r}(a+bi)^{k_i}\right)\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}=(k_0,\ldots,k_r)\in I(k,r)}\left((b^{k_0}-a^{k_0})\prod_{i=1}^{r}(a+bi)^{k_i}\right)\zeta_{\mathcal{A}}^{\star}(\mathbf{k})=0$$

が成り立つであろう.

3.2.11. その他の関係式.

定理 3.2.38 (一般化制限付き和公式; Murahara–Murakami [MM, Theorem 1.6]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 h に対し

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_r)\in I(r+h,r)}\sum_{\substack{\mathbf{h}_i\in I(k_i+l_i-1,l_i)\\(1\le i\le r)}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_r)\\&=\sum_{i=0}^{h}\sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_{r-1})\in\mathbb{Z}_{\ge0}^{r-1}\\\mathrm{wt}(\mathbf{e})=h-i}}\sum_{\substack{\mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\ge0}^{h+r-i}\\\mathrm{wt}(\mathbf{f})=i}}\zeta_{\mathcal{A}}((k_1,\{1\}^{e_1},\dots,k_{r-1},\{1\}^{e_{r-1}},k_r)\oplus\mathbf{f})\end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 3.2.39. Murahara–Murakami [MM] は一般化制限付き和公式が導分関係式 (定理 3.2.29) と同値であることも示している. 注意 3.2.30 と併せて Ohno 型関係式 (定理 3.2.29) とも同値であることがわかる.

定理 3.2.40 (Kaneko–Sakata 型和公式; Murahara–Sakata [MS, Theorem 1.3]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と整数 $h\ge r$ に対し

$$\sum_{(l_1,\dots,l_{r+1})\in I(h+1,r+1)}\zeta_{\mathcal{A}}(\{1\}^{l_1-1},k_1+1,\dots,\{1\}^{l_r-1},k_r+1,\{1\}^{l_{r+1}-1})=\sum_{i=0}^{h}\sum_{\substack{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_{\ge1}^{i}\\\mathbf{k}\preceq\mathbf{l}}}\sum_{\mathbf{h}\in I(h,i)}(-1)^{i-r}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}\oplus\mathbf{h})$$

が成り立つ.

定理 3.2.41 (Li 型定理; Sakurada). 正整数 k,r,s $(k>r\ge s)$ に対し

$$X^{\star}_{\mathcal{A},0}(k,r,s)\coloneqq\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$$

とおくと, 正整数 m,n,s に対し

$$(-1)^mX^{\star}_{\mathcal{A},0}(m+n+1,n+1,s)=(-1)^nX^{\star}_{\mathcal{A},0}(m+n+1,m+1,s)$$

が成り立つ.

3.3. ***p* 進有限多重ゼータ値の定義.** 有限多重ゼータ値の定義において $\bmod p$ としている部分をより高次の剰余 $\bmod p^n$ $(n\ge1)$ で考えたゼータ値も意味を持つことがわかる. さらにこれらを全ての n についてまとめて考えた $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータ値に関してもいくつか関係式が発見されている. 以下ではその定義と知られている結果を述べる.

定義 3.3.1. 正整数[34] n に対し環 $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n\coloneqq\left(\prod_p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)\Big/\left(\bigoplus_p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)$$

で定め, $m<n$ に対し成分ごとに $\bmod p^m$ を取る写像 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_m$ による逆系の射影極限を $\widehat{\mathcal{A}}$ と書く.

自然な全射 $\pi\colon\prod_p\mathbb{Z}_p\to\widehat{\mathcal{A}}$ によって任意の $\widehat{\mathcal{A}}$ の元は p 進整数の族 $(a_p)_p$ を用いた表示 $\pi((a_p)_p)$ を持つ. これを $a_{\boldsymbol{p}}$ と書く. とくに, $\boldsymbol{p}\coloneqq\pi((p)_p)$ を無限大素数 (*infinitely large prime*) という. また, 自然な全射 $\pi_n\colon\widehat{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}_n$ が誘導する同型 $\widehat{\mathcal{A}}/\boldsymbol{p}^n\widehat{\mathcal{A}}\simeq\mathcal{A}_n$ があるが, これによって $\pi_n(a_{\boldsymbol{p}})$ のことも誤解の恐れがなければ $a_{\boldsymbol{p}}$ と書く. これはもちろん $n=1$ のとき §3.1 で用いた記法に一致する.

定義 3.3.2. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})\coloneqq\zeta_{<\boldsymbol{p}}(\mathbf{k}),\qquad\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})\coloneqq\zeta^{\star}_{<\boldsymbol{p}}(\mathbf{k})\in\widehat{\mathcal{A}}$$

とおき, それぞれ $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータ値 (***p**-adic finite multiple zeta value*), $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータスター値 (***p**-adic finite multiple zeta star value*) と呼ぶ. これらは $\widehat{\mathcal{A}}$ 多重ゼータ値, $\widehat{\mathcal{A}}$ 多重ゼータスター値と呼ばれることもある.

[34] この n はときおり *superbity* と呼ばれる.

定義 3.3.3. インデックス $\mathbf{k}$ と正整数 n に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) \coloneqq \pi_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k}) \coloneqq \pi_n(\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})) \in \mathcal{A}_n$$

とおき, それぞれ $\mathcal{A}_n$ 多重ゼータ値 ($\mathcal{A}_n$*-multiple zeta value*), $\mathcal{A}_n$ 多重ゼータスター値 ($\mathcal{A}_n$*-multiple zeta star value*) と呼ぶ.

以下では正整数 k, n に対し

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_n}(k) \coloneqq \left(\frac{B_{p^n-(k-1+p^{n-1})}}{k-1+p^{n-1}} \bmod p^n \right)$$

と書く.

命題 3.3.4 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Proposition 3.1])**.** 正整数 n, k, l $(l<n)$ に対し

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_n}(k+l)\boldsymbol{p}^l = \sum_{j=1}^{n-l}(-1)^j \binom{n-l}{j} \frac{B_{j(\boldsymbol{p}-1)-k-l+1}}{j(\boldsymbol{p}-1)-k-l+1}\boldsymbol{p}^l$$

が成り立つ. とくに $l=n-1$ として

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_n}(k+n-1)\boldsymbol{p}^{n-1} = \frac{B_{\boldsymbol{p}-k-n+1}}{k+n-1}\boldsymbol{p}^{n-1}$$

である.

3.4. $\boldsymbol{p}$ **進関係式.** $\boldsymbol{p}$ 進と書いたが, ここでは $\mathcal{A}_2$ や $\mathcal{A}_3$ に限定して知られている結果も記載する.

定理 3.4.1 ($\boldsymbol{p}$ 進対称和公式; Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.1])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\dots,B_l}(-1)^{r-l}\prod_{i=1}^{l}(|B_i|-1)!\,\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\sum_{j\in B_i}k_j\right),$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\dots,B_l}\prod_{i=1}^{l}(|B_i|-1)!\,\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\sum_{j\in B_i}k_j\right)$$

が成り立つ. ここで $\{B_1,\dots,B_l\}$ は $\{1,\dots,r\}$ の分割全体を渡る[35].

Proof. 命題 1.3.8 と調和関係式 (定理 3.4.13) を用いて一つ目の等式はわかる. 二つ目はそれに加えて S^* (命題 1.3.5 で定義した $\mathfrak{H}^1$ の Hopf 代数としての対蹠射) が調和積に関して準同型であることを使う. □

定理 3.4.2 (Washington [Was, Theorem 1], Sakugawa–Seki)**.** 正整数 k, n に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k) = (-1)^k\sum_{l=1}^{n-1}\binom{k+l-1}{l}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_n}(k+l)\boldsymbol{p}^l$$

が成り立つ.

定理 3.4.3 (Zhao [Zh1, Theorem 3.2])**.** 正の偶数 k と和が k になる正整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} - k\right)\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_2}(k+1)\boldsymbol{p},$$

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} + k\right)\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_2}(k+1)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

定理 3.4.4 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.6 (3.10), (3.11)])**.** 正整数 k, r に対し

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{rk+r-1}\Bigg(&k\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_3}(rk+1)\boldsymbol{p}\\ &+\left(\frac{k(rk+1)}{2}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_3}(rk+2) - k^2\sum_{l=1}^{r-1}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_3}(lk+1)\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_3}((r-l)k+1)\right)\boldsymbol{p}^2\Bigg),\end{aligned}$$

[35] Bernoulli 数と混同してはいけない.

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{rk}\Bigg(k\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(rk+1)\boldsymbol{p} + \Bigg(\frac{k(rk+1)}{2}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(rk+2) + k^2\sum_{l=1}^{r-1}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(lk+1)\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}((r-l)k+1)\Bigg)\boldsymbol{p}^2\Bigg)$$

が成り立つ.

系 3.4.5 (Zhou–Cai [ZC, Remark]). 正の奇数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{r-1}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_3}(\{k\}^r) = (-1)^r\frac{k(rk+1)}{2}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(rk+2)\boldsymbol{p}^2$$

が成り立つ.

系 3.4.6 (Zhou–Cai [ZC, Remark]). 正整数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(\{k\}^r) = (-1)^{r-1}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\{k\}^r) = (-1)^{rk+r-1}k\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_2}(rk+1)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

定理 3.4.7 (Hessami-Pilehrood–Hessami-Pilehrood–Tauraso [HHT, Theorem 4.5], Sakugawa–Seki [SS, Theorem 3.18]). 和が偶数となる非負整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}_2}(\{1\}^{k_1}, 2, \{1\}^{k_2}) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{k_1}\binom{k_1+k_2+3}{k_2+2}\right)\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k_1+k_2+3)\boldsymbol{p},$$

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\{1\}^{k_1}, 2, \{1\}^{k_2}) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{k_1}\binom{k_1+k_2+3}{k_1+2}\right)\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k_1+k_2+3)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

定理 3.4.8 (Bowman–Bradley 型定理; Murahara–Onozuka–Seki [MOS, Theorem 1.3]). 非負整数の組 $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ に対し

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\{2\}^{n_1}, 1, \{2\}^{n_2}, 3, \dots, \{2\}^{n_{2k_1-1}}, 1, \{2\}^{n_{2k_1}}, 3, \{2\}^{n_{2k_1+1}})$$

$$= (-1)^{k_2}\left((-1)^{k_1}2^{1-2k_1}\binom{k_1+k_2}{k_1} - 4\binom{2k_1+k_2}{2k_1}\right)\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_2}(4k_1+2k_2+1)\boldsymbol{p},$$

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\{2\}^{n_1}, 1, \{2\}^{n_2}, 3, \dots, \{2\}^{n_{2k_1-]1}}, 1, \{2\}^{n_{2k_1}}, 3, \{2\}^{n_{2k_1+1}})$$

$$= (-1)^{k_1}2^{1-2k_1}\binom{k_1+k_2}{k_1}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_2}(4k_1+2k_2+1)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

定理 3.4.9 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.2 (5.4), (5.5)]). 正整数 k, r $(k \geq r)$ に対し

$$T_{k,r} \coloneqq \sum_{\substack{B_1\sqcup B_2=\{1,\dots,r\}\\ B_1,B_2\neq\varnothing}} \sum_{\substack{b_1+b_2=k\\ b_1\geq|B_1|,\ b_2\geq|B_2|}} \frac{b_1!b_2!}{(b_1-|B_1|)!(b_2-|B_2|)!}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(b_1+1)\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(b_2+1)$$

としたとき

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{k+r-1}\left(\binom{k}{r}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k+1)\boldsymbol{p} + \left(\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k+2) - \frac{1}{r!}T_{k,r}\right)\boldsymbol{p}^2\right),$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{k}\left(\binom{k}{r}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k+1)\boldsymbol{p} + \left(\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\mathfrak{z}_{\mathcal{A}_3}(k+2) + \frac{1}{r!}T_{k,r}\right)\boldsymbol{p}^2\right)$$

が成り立つ.

系 3.4.10 (Seki–Yamamoto [SY2, Proposition 4.6])**.** 正整数 k, r $(k \geq r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1} \sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\binom{k}{r}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_2}(k+1)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

系 3.4.11 (Seki–Yamamoto [SY2, Theorem 5.1])**.** 正整数 r と正の奇数 k $(k \geq r)$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1} \sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_3}(k+2)\boldsymbol{p}^2$$

が成り立つ.

定理 3.4.12 (Seki–Yamamoto [SY2, Theorem 4.7], Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.4])**.** 正整数 k, r, i $(1 \leq i \leq r < k)$ に対し

$$b_{2;k,r,i} \coloneqq \binom{k-1}{r} + (-1)^{r-i}\left((k-r)\binom{k}{i-1} + \binom{k-1}{i-1} + (-1)^{r-1}\binom{k-1}{r-i}\right),$$
$$b^{\star}_{2;k,r,i} \coloneqq \binom{k-1}{r} + (-1)^{i-1}\left((k-r)\binom{k}{r-i} + \binom{k-1}{r-i} + (-1)^{r-1}\binom{k-1}{i-1}\right)$$

とおくと

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_i(k,r)} \zeta_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\frac{b_{2;k,r,i}}{2}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_2}(k+1)\boldsymbol{p}, \qquad \sum_{\mathbf{k}\in I_i(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{k}) = \frac{b^{\star}_{2;k,r,i}}{2}\mathfrak{Z}_{\mathcal{A}_2}(k+1)\boldsymbol{p}$$

が成り立つ.

定理 3.4.13 ($\boldsymbol{p}$ 進調和関係式)**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

Proof. $\mathcal{A}$ での調和関係式 (定理 3.2.16) と同様. 有限和のレベルで調和関係式が成り立つことよりわかる. □

系 3.4.14 ($\boldsymbol{p}$ 進対蹠関係式; Sakugawa–Seki [SS, Corollary 3.16 (45)])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^j \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}_{[i]})\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}) = \delta_{\mathbf{k},\varnothing}$$

が成り立つ.

Proof. 定理 3.4.13 と系 1.3.6 より従う. □

定理 3.4.15 ($\boldsymbol{p}$ 進シャッフル関係式; Seki [Se1, Theorem 6.4], Jarossay [J5, Proposition 3.4.3 (ii)])**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k} \,\text{ш}\, \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{l})}} b(\mathbf{l};\mathbf{e})\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}\oplus\mathbf{e}})\boldsymbol{p}^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}$$

が成り立つ. ここで

$$b(k_1,\ldots,k_r;e_1,\ldots,e_r) = \prod_{i=1}^{r}\binom{k_i+e_i-1}{e_i}$$

とおいた.

Proof by Seki. 十分大きい素数 p を固定し, $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$, $\mathbf{l} = (l_1,\ldots,l_s)$ と書く. 多重調和和は定義より多重ポリログの係数の和として書ける: 具体的には

$$\zeta_{<p}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{p-1}\langle \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z),\ z^i\rangle$$

となる (§2.5.5 で用いたように, $\langle f, w\rangle$ は冪級数 f の w での係数を表す). ゆえに多重ポリログ関数のシャッフル関係式 (注意 2.3.38) を用いて

$$\begin{aligned}
\zeta_{<p}(\mathbf{k} \mathbin{ш} \mathbf{l}) &= \sum_{i=1}^{p-1} \langle \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z),\ z^i\rangle \\
&= \sum_{\substack{1\le i,j\\ i+j\le p-1}} \langle \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z),\ z^i\rangle\langle \mathrm{Li}_{\mathbf{l}}(z),\ z^j\rangle \\
&= \sum_{\substack{1\le i,j\\ i+j\le p-1}} \left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_r=i} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)\left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_s=j} \frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\right)
\end{aligned}$$

と変形できる. ここで $j \mapsto p-j$ と, 各 $1 \le v \le s$ に対し $n_v \mapsto p - n_{s+1-v}$ という変換を施すと, 右辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\le i,j\\ i+j\le p-1}} \left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_r=i} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)\left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_s=j} \frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\right) \\
&= \sum_{\substack{1\le i,p-j\\ i+p-j\le p-1}} \left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_r=i} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)\left(\sum_{0<p-n_s<\cdots<p-n_1=p-j} \frac{1}{(p-n_s)^{l_1}\cdots (p-n_1)^{l_s}}\right)
\end{aligned}$$

となり, $0 < n < p$ で p 進的に収束する級数

$$\frac{1}{(p-n)^l} = (-1)^l \sum_{e\ge 0} \binom{l+e-1}{e} \frac{p^e}{n^{l+e}}$$

より

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\le i,p-j\\ i+p-j\le p-1}} \left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_r=i} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)\left(\sum_{0<p-n_s<\cdots<p-n_1=p-j} \frac{1}{(p-n_s)^{l_1}\cdots (p-n_1)^{l_s}}\right) \\
&= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \sum_{\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_s)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^s} b(\mathbf{l};\mathbf{e}) \sum_{0<m_1<\cdots<m_r=i<j=n_1<\cdots<n_s\le p-1} \frac{p^{e_1+\cdots+e_s}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r} n_1^{l_s+e_s}\cdots n_s^{l_1+e_1}} \\
&= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})} \sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^s} b(\mathbf{l};\mathbf{e})\zeta_{<p}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}\oplus\mathbf{e}})p^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}
\end{aligned}$$

と計算できる. □

定理 3.4.16 (***p*** **進導分関係式**; Murahara–Onozuka [MOnoz1, Theorem 1.3])**.** 任意の $w \in \mathfrak{H}^1 \setminus \mathbb{Q}$ と非負整数 h に対し

$$\sum_{g=0}^{\infty} Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\left\langle (R_{e_0}^{-1}\circ\Delta_u)\left(we_0 - we_1u\frac{1}{1+e_0u}\frac{e_0^2v}{1-e_0v}\right),\ u^hv^g\right\rangle\right)\boldsymbol{p}^n = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\{1\}^h)Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w)$$

が成り立つ. ここで Δ_u とは $e_0 \mapsto (1+e_1u)^{-1}e_0$, $e_1 \mapsto e_1 + e_1(1+e_1u)^{-1}e_0u$ から定まる $\mathfrak{H}[\![s,t]\!]$ 上の自己同型である.

定理 3.4.17 (***p*** **進双対性**; Seki [Se3, Theorem 1.3], Takeyama–Tasaka [TT, Corollary 6.8])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^{\star}(\mathbf{k},\{1\}^n)\boldsymbol{p}^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}^{\star}(\mathbf{k}^{\vee},\{1\}^n)\boldsymbol{p}^n$$

が成り立つ.

定理 3.4.18 (Rosen's asymptotic duality theorem[36]; Rosen [Ro1, Theorem 4.7])**.** $\widehat{\mathfrak{H}}^1 \coloneqq \mathbb{Q} + e_1\mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ とし, 写像[37] $W_{\widehat{\mathcal{A}}}\colon \widehat{\mathfrak{H}}^1 \to \widehat{\mathcal{A}}$ を

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0} a_{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}} \mapsto \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0} a_{\mathbf{k}} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) \boldsymbol{p}^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} \qquad (a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{Q})$$

から定める. また, 調和積 $*$ と注意 3.2.22 で定義した ϕ を $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ へ連続に拡張し, 連続な代数自己同型 $\Phi\colon \widehat{\mathfrak{H}}^1 \to \widehat{\mathfrak{H}}^1$ を

$$w \mapsto \left(w * \frac{1}{1+e_1}\right)(1+e_1)$$

から定める. このとき任意の $w \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対し

$$W_{\widehat{\mathcal{A}}}(\phi(w)) = W_{\widehat{\mathcal{A}}}(\Phi(w))$$

が成り立つ.

定理 3.4.19 ($\boldsymbol{p}$ 進巡回和公式; Kawasaki [Kawasa, Theorem 5.7], Takeyama–Tasaka [TT, Corollary 6.11])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]}, k_i - j) &= \sum_{i=1}^{r}\Bigg(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i-1]}, k_i+1) + \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]}, 1) \\ &\qquad + \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_i+j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i-1]}) + \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]})\Big)\boldsymbol{p}^j\Bigg), \\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1} \zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]}, k_i - j) &= k\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k+1) + \sum_{i=1}^{r}\left(\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]}, 1) + \sum_{j=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(j+1, \mathbf{k}^{[i]}, \mathbf{k}_{[i]})\boldsymbol{p}^j\right)\end{aligned}$$

が成り立つ.

4. 対称多重ゼータ値

4.1. **対称多重ゼータ値の定義.**

以後 $\bullet$ は特記ない限り $*$ と ш を意味するものとする.

定義 4.1.1. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{[i]})} \zeta^{\bullet}(\mathbf{k}_{[i]}; T)\zeta^{\bullet}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}; T)$$

とおく.

命題 4.1.2. インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ は T に依存せず,

$$\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) - \zeta^{ш}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

Proof. 命題 4.3.5 の証明で $t = 0$ の場合のみ考えればよい. □

定義 4.1.3. 命題 4.1.2 によって $\bullet$ によらず定まる $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の元 $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を対称多重ゼータ値 (*symmetric multiple zeta value, SMZV*) という. また,

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}^{\star})$$

を対称多重ゼータスター値 (*symmetric multiple zeta star value, SMZSV*) と呼ぶ.

有限多重ゼータ値のときと同様, SMZV や SMZSV をときどき $\mathcal{S}$ 多重ゼータ値や $\mathcal{S}$ 多重ゼータスター値と呼ぶ[38]. Hoffman 代数の言葉を用いて, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z_{\mathcal{S}}\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ を $z_{\mathbf{k}} \mapsto \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ ($\mathbf{k} \in \mathcal{I}_0$) から定める.

定理 4.1.4 (Yasuda [Yas, Theorem 6.1])**.** 任意の正整数 k に対し

$$\mathcal{Z}_k = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathcal{I}_0,\ \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k\}$$

が成り立つ.

---

[36] もちろん mod $\boldsymbol{p}$ で考えると注意 3.2.22 に一致するが, $\boldsymbol{p}$ 進双対性との同値性について述べた論文は筆者の知る限り無い.

[37] weighted finite multiple zeta function と呼ばれる.

[38] 文献によっては real finite multiple zeta value と呼ばれることもある.

次の予想は有限/対称多重ゼータ値の理論における “主予想” である.

予想 4.1.5 (Kaneko–Zagier 予想)**.** $\mathbb{Q}$ 代数の同型であって $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ $(\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0)$ に送るものが存在するであろう. とくに, 有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値はまったく同じ関係式を満たすであろう.

4.2. **対称多重ゼータ値の関係式.**

4.2.1. 特殊値.

定理 4.2.1. 任意の正整数 k に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(k)=0$$

が成り立つ.

Proof. 定義より明らか. □

定理 4.2.2. 正整数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\{k\}^r)=\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{k\}^r)=0$$

が成り立つ.

Proof. 定理 4.2.16 において $\mathbf{k}=\{k\}^r$ とすればよい. □

定理 4.2.3 (Kaneko [Kan2, Example 9.4 (2)])**.** 正整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(k_1,k_2)=\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2}{k_1}\zeta(k_1+k_2)$$

が成り立つ.

定理 4.2.4. 正整数 r と正の奇数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\{k_1,k_2\}^r)=\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{k_1,k_2\}^r)=0$$

が成り立つ.

Proof. 筆者の知る限り explicit に述べた論文はないが, 調和関係式 (定理 4.2.11) と低 depth の明示公式 (定理 4.2.1, 定理 4.2.3) があるため $\mathcal{A}$ でのケース (定理 3.2.5) と同様にできる. □

定理 4.2.5 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.5])**.** 正の奇数 k と和が k になる正整数 k_1,k_2,k_3 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(k_1,k_2,k_3)=-\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}\binom{k}{k_1}-(-1)^{k_3}\binom{k}{k_3}\right)\zeta(k)$$

が成り立つ.

Proof. 有限多重ゼータ値の深さ 3 の明示公式 (定理 3.2.6) の証明は深さ 1, 2 での特殊値, 調和関係式, 反転公式のみを用いているため, 同じ道具 (定理 4.2.1, 定理 4.2.3, 定理 4.2.11, 定理 4.2.14) の揃っている対称多重ゼータ値でも同じ証明が通用する. □

定理 4.2.6 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.8])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})=(-1)^{k_1+k_2}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})=(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2+2}{k_1+1}\zeta(k_1+k_2+2)$$

が成り立つ.

Proof. 有限多重ゼータ値の $(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})$ の明示公式 (定理 3.2.7) の証明は深さ 2 での特殊値, Hoffman 双対性, 調和関係式のみを用いているため, 同じ道具 (定理 4.2.3, 定理 4.2.15, 定理 4.2.11) の揃っている対称多重ゼータ値でも同じ証明が通用する. □

定理 4.2.7 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.11])**.** 非負整数 k_1,k_2 に対し

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{S}}(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2})&=(-1)^{k_1+k_2+1}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2})\\&=\frac{4(-1)^{k_1+k_2}(k_1-k_2)}{2k_2+1}\left(1-\frac{1}{4^{k_1+k_2}}\right)\binom{2k_1+2k_2+1}{2k_1+1}\zeta(2k_1+2k_2+1)\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 4.2.8 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.10])**.** 非負整数 k_1, k_2 に対し

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{S}}(\{2\}^{k_1}, 3, \{2\}^{k_2}) &= (-1)^{k_1+k_2+1}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{2\}^{k_1}, 3, \{2\}^{k_2}) \\ &= 2(-1)^{k_1+k_2}\frac{k_1-k_2}{k_2+1}\binom{2k_1+2k_2+3}{2k_1+2}\zeta(2k_1+2k_2+3)\end{aligned}$$

が成り立つ.

4.2.2. *Bowman–Bradley* 型定理.

定理 4.2.9 (Bowman–Bradley 型定理; Ono [On2, p. 22], Charlton [C2, Corollary 2.2])**.** 非負整数の組 $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ と正の奇数 a, b, 正の偶数 c に対し

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta_{\mathcal{S}}(\{c\}^{n_1}, a, \{c\}^{n_2}, b, \dots, \{c\}^{n_{2k_1-1}}, a, \{c\}^{n_{2k_1}}, b, \{c\}^{n_{2k_1+1}}) \\ &= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}} \zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\{c\}^{n_1}, a, \{c\}^{n_2}, b, \dots, \{c\}^{n_{2k_1-1}}, a, \{c\}^{n_{2k_1}}, b, \{c\}^{n_{2k_1+1}}) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 有限多重ゼータ値の Bowman–Bradley 型定理 (定理 3.2.14) の証明は調和関係式 (とそこから従う対称和公式と対蹠関係式) のみを用いているため, 同じ道具 (定理 4.2.11) の揃っている対称多重ゼータ値でも同じ証明が通用する. □

注意 4.2.10. Fujita–Komori [FK] が対称多重ゼータ値に対する Aoki–Ohno 型関係式 (定理 3.2.15 の $\mathcal{S}$ 類似) の証明を宣言している.

4.2.3. 複シャッフル関係式.

定理 4.2.11 (調和関係式; Kaneko [Kan2, Theorem 9.2], Jarossay [J1, Proposition 1.5 (i)], Hirose [Hi3, Theorem 7])**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{l}), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} \mathbin{\overline{*}} \mathbf{l}) = \zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

Proof. 定理 4.4.12 の証明で $\bmod t$ とする. □

系 4.2.12 (対蹠関係式)**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^j \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_{[i]})\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}) = \delta_{\mathbf{k},\varnothing}$$

が成り立つ.

Proof. 定理 4.2.11 と系 1.3.6 より従う. □

定理 4.2.13 (シャッフル関係式; Kaneko [Kan2, Theorem 9.6], Hirose [Hi3, Theorem 8], Jarossay [J1, Théorème 1.7 (i)], Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Corollary 3.11])**.** インデックス $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} \mathbin{⧢} \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}}), \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} \mathbin{\overline{⧢}} \mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}(\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}, \overleftarrow{\mathbf{l}}) - \zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k} \uplus \overleftarrow{\mathbf{l}}))$$

が成り立つ.

系 4.2.14 (反転公式; Bachmann–Takeyama–Tasaka [BTT1, Corollary 2.17])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\zeta_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\mathbf{k}})$$

が成り立つ.

4.2.4. *Hoffman* 双対性.

定理 4.2.15 (Hoffman 双対性; Jarossay [J1, Corollaire 1.12], Hirose [Hi3, Theorem 8], Bachmann–Takeyama–Tasaka [BTT1, Corollary 2.17])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = -\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}^{\vee})$$

が成り立つ.

4.2.5. 和公式.

定理 4.2.16 (対称和公式; Murahara [Murah1, Theorem 1.1]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta_{\mathcal{S}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)})=0$$

が成り立つ.

Proof. Hoffman 代数のレベルで成り立つ (命題 1.3.8) の両辺に $\zeta_{\mathcal{S}}$ を適用することでわかる. □

定理 4.2.17 (和公式; [Murah1, Theorem 1.2]). 集合 $I_i(k,r)$ を定理 3.2.25 と同様にすると, $1\le i\le r<k$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_i(k,r)}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=(-1)^r\sum_{\mathbf{k}\in I_i(k,r)}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=(-1)^i\left(\binom{k-1}{i-1}+(-1)^r\binom{k-1}{r-i}\right)\zeta(k)$$

が成り立つ.

Proof by Saito–Wakabayashi. 有限多重ゼータ値における和公式 (定理 3.2.25) の証明は深さ 1 での特殊値, 調和関係式, $(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2})$ での特殊値のみを用いているため, 同じ道具 (定理 4.2.1, 定理 4.2.11, 定理 4.2.6) の揃っている対称多重ゼータ値でも同じ証明が通用する. □

注意 4.2.18. 有限多重ゼータ値と同様, 対称和公式 (定理 4.2.16) より

$$\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}\in I(k,r)}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=0$$

となる.

定理 4.2.19 (導分関係式; Murahara [Murah2, Theorem 2.1], Horikawa–Murahara–Oyama [HoMuOy, §5]). 任意の $w\in\mathfrak{H}^0\setminus\mathbb{Q}$ と正整数 h に対し

$$(Z_{\mathcal{S}}\circ R_{e_0}^{-1}\circ\partial_h)(w)=0$$

が成り立つ.

Proof by Horikawa–Murahara–Oyama. 有限多重ゼータ値の導分関係式 (定理 3.2.27) の証明は深さ 1 での特殊値, 調和関係式のみを用いているため, 同じ道具 (定理 4.2.1, 定理 4.2.11) の揃っている対称多重ゼータ値でも同じ証明が通用する. □

定理 4.2.20 (Quasi-derivation relation; Kaneko–Murahara–Murakami [KMM, Theorem 4.1]). 任意の $w\in\mathfrak{H}^0\setminus\mathbb{Q}$ と正整数 h, 有理数 c に対し

$$(Z_{\mathcal{S}}\circ R_{e_0}^{-1}\circ\partial_h^{(c)})(w)=Z_{\mathcal{S}}(R_{e_0}^{-1}(w))Z_{\mathcal{S}}(q_h^{(c)})$$

が成り立つ.

4.2.6. *Ohno* 関係式系統.

定理 4.2.21 (Ohno 型関係式; Oyama [Oy, Remark 1.5]). インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}^r_{\ge0}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})=\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}^s_{\ge0}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\zeta_{\mathcal{S}}((\mathbf{k}^\vee\oplus\mathbf{e})^\vee)$$

が成り立つ.

定理 4.2.22 (スター Ohno 型関係式; Hirose–Imatomi–Murahara–Saito [HIMS, Theorem 1.4]). インデックス $\mathbf{k}$ に対し $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ とおくと, 非負整数 h に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}^r_{\ge0}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}b_2(\mathbf{k};\mathbf{e})\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})=-\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}^s_{\ge0}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h}}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}^\vee\oplus\mathbf{e})$$

が成り立つ.

定理 4.2.23 (Hirose–Murahara–Saito [HMS2, Theorem 1.4])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$O_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}} \zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e})t^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{wt}(\mathbf{e})} + \sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}^{\vee})}} (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(\mathbf{k}^{\vee}\oplus\mathbf{e})t^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{wt}(\mathbf{e})}$$

とおき, 正整数 k,i に対し

$$F_{\mathcal{S};k,i}(t) \coloneqq \sum_{n=k+i+1}^{\infty}\left((-1)^k\binom{n-1}{k-1} - (-1)^i\binom{n-1}{i-1}\right)\zeta(n)t^n$$

と定める. このとき正整数 k_1,k_2,k_3 に対し

$$O_{\mathcal{S}}(k_1,k_2,k_3) = \delta_{k_2,1}F_{\mathcal{S};k_1,1}(t)F_{\mathcal{S};k_3,1}(t) - \sum_{i=2}^{k_2-1}F_{\mathcal{A};k_1,i}(t)F_{\mathcal{S};k_3,k_2+1-i}(t)$$

が成り立つ.

4.2.7. 巡回和公式.

定理 4.2.24 (巡回和公式; Hirose–Murahara–Ono [HiMuOn1, Theorem 2.4, Theorem 6.1], Hirose–Sato)**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta_{\mathcal{S}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\Big(\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1)+\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)+\zeta_{\mathcal{S}}(k_i+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]})+\zeta_{\mathcal{S}}(1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})\Big),\\
&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)=\sum_{i=1}^{r}\Big(\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)+\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 4.2.25 (二重 Ohno 関係式)**.** 非負整数 $k_1,n_1,\dots,n_{2k_1+1}$ に対し

$$\mathbf{k}=(\{2\}^{n_1},1,\{2\}^{n_2},3,\dots,\{2\}^{n_{2k_1-1}},1,\{2\}^{n_{2k_1}},3,\{2\}^{n_{2k_1+1}})$$

とおき, $r=\mathrm{dep}(\mathbf{k})$, $s=\mathrm{wt}(\mathbf{k})-r$ と書く. このとき非負整数 h_1,h_2 に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h_1\\ \mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=h_2}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}_{\downarrow}\oplus\mathbf{e}\oplus\mathbf{f}) = \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{s}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h_1\\ \mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{s}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=h_2}}\zeta_{\mathcal{S}}(((\mathbf{k}_{\downarrow})^{\vee}\oplus\mathbf{e}\oplus\mathbf{f})^{\vee})$$

が成り立つ.

注意 4.2.26. Fujita–Komori が対称多重ゼータ値に対する一般化重み付き和公式 (定理 3.2.35 の $\mathcal{S}$ 類似) の証明を宣言している.

4.2.8. その他の関係式.

定理 4.2.27 (一般化制限付き和公式; Murahara–Murakami [MM, Theorem 1.6])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 h に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_r)\in I(r+h,r)}\ \sum_{\substack{\mathbf{h}_i\in I(k_i+l_i-1,l_i)\\(1\leq i\leq r)}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_r)\\
&=\sum_{i=0}^{h}\ \sum_{\substack{\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_{r-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=h-i}}\ \sum_{\substack{\mathbf{f}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{h+r-i}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{f})=i}}\zeta_{\mathcal{S}}((k_1,\{1\}^{e_1},\dots,k_{r-1},\{1\}^{e_{r-1}},k_r)\oplus\mathbf{f})
\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 4.2.28 (Kaneko–Sakata 型和公式; Murahara–Sakata [MS, Theorem 1.3]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と整数 $h\geq r$ に対し

$$\sum_{(l_1,\dots,l_{r+1})\in I(h+1,r+1)}\zeta_{\mathcal{S}}(\{1\}^{l_1-1},k_1+1,\dots,\{1\}^{l_r-1},k_r+1,\{1\}^{l_{r+1}-1})=\sum_{i=0}^{h}\sum_{\substack{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^i\\ \mathbf{k}\preceq\mathbf{l}}}\sum_{\mathbf{h}\in I(h,i)}(-1)^{i-r}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{l}\oplus\mathbf{h})$$

が成り立つ.

定理 4.2.29 (Li 型定理; Sakurada). 正整数 k,r,s $(k>r\geq s)$ に対し

$$X^{\star}_{\mathcal{S},0}(k,r,s)\coloneqq\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$$

とおくと, 正整数 m,n,s に対し

$$(-1)^mX^{\star}_{\mathcal{S},0}(m+n+1,n+1,s)=(-1)^nX^{\star}_{\mathcal{S},0}(m+n+1,m+1,s)$$

が成り立つ.

4.3. t **進対称多重ゼータ値の定義.** Kaneko–Xu–Yamamoto の Hurwitz 型正規化多項式の定義 (命題 2.5.23) を思い出しておく.

命題 4.3.1. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{t,\bullet}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};T)=\sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}}b(\mathbf{k};\mathbf{e})\zeta^{\bullet}(\mathbf{k}\oplus\mathbf{e};T)(-t)^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}$$

注意 4.3.2. 注意 2.3.43 で導入した二変数のシャッフル正規化多項式 $Z^{ш}_{S,T}(W)$ を用いれば

$$\zeta^{t,ш}_{\mathrm{shift}}(\mathbf{k};T)=\sum_{n=0}^{\infty}Z^{ш}_{0,T}(e_0^nz_{\mathbf{k}})t^n$$

と書くことができる.

定義 4.3.3. インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})\coloneqq\sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{[i]})}\zeta^{\bullet}(\mathbf{k}_{[i]};T)\zeta^{-t,\bullet}_{\mathrm{shift}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}};T)$$

とおく.

補題 4.3.4. 準同型 $\sigma^t\colon\mathfrak{H}^1[\![t]\!]\to\mathfrak{H}^1[\![t]\!]$ を

$$\sigma^t(e_0)=e_0(1-e_0t)^{-1},\qquad\sigma^t(e_1)=e_1(1-e_0t)^{-1},\qquad\sigma^t(t)=t$$

で定め, 調和積を t の冪ごとに作用するものとして $\mathfrak{H}^1[\![t]\!]$ 上の積に拡張すると σ^t は調和積に関して準同型となる.

Proof. インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し $\sigma^t(z_{\mathbf{k}}*z_{\mathbf{l}})=\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}})$ を示せば十分である. これを $N=\mathrm{dep}(\mathbf{k})+\mathrm{dep}(\mathbf{l})$ の帰納法で示す. $N=0,1$ のときはそれぞれ $\sigma^t(1*1)=1$ と $\sigma^t(1*z_k)=\sigma^t(z_k*1)=\sigma^t(z_k)$ (k は正整数) より明らかで, $N-1$ 以下で主張が成り立っていることを仮定したとき深さの和 $N-2$ のインデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ と正整数 k,l に対し

$$\begin{aligned}&\sigma^t(z_{\mathbf{k},k}*z_{\mathbf{l},l})\\&\quad=(\sigma^t(z_{\mathbf{k},k})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}}))\sigma^t(z_l)+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l},l}))\sigma^t(z_k)+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}}))\sigma^t(z_{k+l})\end{aligned}$$

である一方

$$\begin{aligned}\sigma^t(z_{\mathbf{k},k})*\sigma^t(z_{\mathbf{l},l})&=\sum_{e,f=0}^{\infty}\binom{k+e-1}{e}\binom{l+f-1}{f}(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})z_{k+e}*\sigma^t(z_{\mathbf{l}})z_{l+f})t^{e+f}\\&=\sum_{e,f=0}^{\infty}\binom{k+e-1}{e}\binom{l+f-1}{f}((\sigma^t(z_{\mathbf{k}})z_{k+e}*\sigma^t(z_{\mathbf{l}}))z_{l+f}\\&\qquad+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}})z_{l+f})z_{k+e}+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}}))z_{k+e+l+f})t^{e+f}\\&=(\sigma^t(z_{\mathbf{k},k})*\sigma^t(z_{\mathbf{l}}))\sigma^t(z_l)+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}})*\sigma^t(z_{\mathbf{l},l}))\sigma^t(z_k)\end{aligned}$$

$$+(\sigma^t(z_{\mathbf{k}}) * \sigma^t(z_{\mathbf{l}})) \cdot \sum_{e,f=0}^{\infty} \binom{k+e-1}{e}\binom{l+f-1}{f} z_{k+e+l+f} t^{e+f}$$

となる. 最後の級数は

$$\sum_{e,f=0}^{\infty} \binom{k+e-1}{e}\binom{l+f-1}{f} z_{k+e+l+f} t^{e+f} = z_{k+l-1}(1-e_0t)^{-k}(1-e_0t)^{-l} = \sigma^t(z_{k+l})$$

と計算できて補題を得る. □

命題 4.3.5 (Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Proposition 2.1])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{\bullet}(\mathbf{k})$ は T に依存せず,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{*}(\mathbf{k}) - \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{ш}(\mathbf{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}[\![t]\!]$$

が成り立つ.

Proof. 命題 1.4.7 で定義した対蹠射 $S^{ш}$ ($e_0 \mapsto -e_0$, $e_1 \mapsto -e_1$ で定まる反自己同型) の定義を思い出しておく. さて

$$\phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) \coloneqq \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0} \zeta_{\mathrm{shift}}^{t,\bullet}(\mathbf{k};T) z_{\mathbf{k}}, \qquad \phi_{\mathrm{Ad}}^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) = \phi^{0,\bullet}(e_0,e_1;T)e_1 S^{ш}(\phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;T))$$

とおくと, 定義より

$$\phi_{\mathrm{Ad}}^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0} \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{\bullet}(\mathbf{k}) z_{\mathbf{k}} e_1$$

が成り立つ. この左辺の母関数が T に依存せず, $\mathrm{mod}\ \zeta(2)$ で $\bullet$ に依存しないことを示せば十分である. さてインデックス $\mathbf{k}$ に対し $\zeta_{\mathrm{shift}}^{t,*}(\mathbf{k};T) = Z_T^*(\sigma^t(z_{\mathbf{k}}))$ である (Z_T^* は t 冪の係数ごとに作用) ことから $\zeta_{\mathrm{shift}}^{t,*}$ は調和関係式を満たし, したがって命題 1.3.4 を使うことで許容インデックス $\mathbf{k}$ と非負整数 n に対し

$$\zeta_{\mathrm{shift}}^{t,*}(\mathbf{k},\{1\}^n;T) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_{\mathrm{shift}}^{t,*}(\mathbf{k},\{1\}^{n-i};0)\frac{T^i}{i!}$$

が成り立つ. ゆえに

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{Ad}}^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0'} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{\mathrm{shift}}^{t,\bullet}(\mathbf{k},\{1\}^n;T) z_{\mathbf{k}} e_1^n \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \zeta_{\mathrm{shift}}^{t,\bullet}(\mathbf{k},\{1\}^{n-i})\frac{T^i}{i!} z_{\mathbf{k}} e_1^n \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0'} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\mathrm{shift}}^{t,\bullet}(\mathbf{k},\{1\}^{m})\frac{T^i}{i!} z_{\mathbf{k}} e_1^{m+i} \\
&= \phi_{\mathrm{Ad}}^{t,\bullet}(e_0,e_1;0)\exp(Te_1)
\end{aligned}$$

となる. 一方で写像 ρ を t 冪の係数ごとに作用させて $\mathbb{R}[T][\![t]\!]$ へ拡張すると, 正規化定理 (定理 2.3.44) より $\zeta_{\mathrm{shift}}^{t,ш}(\mathbf{k};T) = \rho(\zeta_{\mathrm{shift}}^{t,*}(\mathbf{k};T))$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\phi^{t,ш}(e_0,e_1;T) &= \phi^{t,*}(e_0,e_1;0)\rho(\exp(Te_1)) \\
&= \phi^{t,*}(e_0,e_1;0)\Gamma_0(-e_1)\exp(Te_1) \\
&= \phi^{t,ш}(e_0,e_1;0)\exp(Te_1)
\end{aligned}$$

がいえる. したがって結局両方の $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し $\phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) = \phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;0)\exp(Te_1)$ が成り立って

$$\phi_{\mathrm{Ad}}^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) = \phi^{\bullet}(e_0,e_1;0)\exp(Te_1)e_1\exp(-Te_1)S^{ш}(\phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;0))$$

は T に依存しない。また, 再び正規化定理より $\phi^{t,\bullet}(e_0,e_1;T) = \phi^{t,*}(e_0,e_1;T)\Gamma_0(-e_1)$ であるため

$$\phi_{\mathrm{Ad}}^{t,ш}(e_0,e_1;T) = \phi^{*}(e_0,e_1;T)\Gamma_0(-e_1)e_1\Gamma_0(e_1)S^{ш}(\phi^{s,*}(e_0,e_1;T))$$

と計算できるが, 定理 2.3.52 より

$$\Gamma_0(-e_1)\Gamma(e_1) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k}e_1^{2k}\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k)!}(-24\zeta(2)e_1^2)^k\right)$$

であるから mod $\zeta(2)$ でこの因子は 1 となる. □

定義 4.3.6. 命題 4.1.2 によって $\bullet$ によらず定まる $(\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z})[\![t]\!]$ の元 $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ を t 進対称多重ゼータ値 (*t-adic symmetric multiple zeta value*) という. また,

$$\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{\star})$$

を t 進対称多重ゼータスター値 (*t-adic symmetric multiple zeta star value*) と呼ぶ.

インデックス $\mathbf{k}$ と正整数 n に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}_n}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) \bmod t^n, \qquad \zeta^{\star}_{\mathcal{S}_n}(\mathbf{k}) \coloneqq \zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}) \bmod t^n \in (\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z})[\![t]\!]/(t^n)$$

をそれぞれ $\mathcal{S}_n$-多重ゼータ値, $\mathcal{S}_n$ 多重ゼータスター値という.

定理 4.3.7 (Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Theorem 1.5])**.** インデックス $\mathbf{k}$ と十分大きい正整数 M に対し

$$\zeta^{*}_{\widehat{\mathcal{S}},M}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{i=0}^{r} \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i<M \\ -M<n_{i+1}<\cdots<n_r<0}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_i^{k_i}(n_{i+1}+t)^{k_{i+1}}\cdots(n_r+t)^{k_r}},$$

$$\zeta^{ш}_{\widehat{\mathcal{S}},M}(\mathbf{k}) \coloneqq \sum_{i=0}^{r} \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i \\ n_{i+1}<\cdots<n_r<0 \\ n_i-n_{i+1}<M}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_i^{k_i}(n_{i+1}+t)^{k_{i+1}}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

とおくと

$$\lim_{M\to\infty} \zeta^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{S}},M}(\mathbf{k}) = \zeta^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$$

が成り立つ. ただし極限は t 冪の係数ごとにとる.

Kaneko–Zagier 予想の $\widehat{\mathcal{A}}$-MZV および $\widehat{\mathcal{S}}$-MZV への一般化が Ono–Seki–Yamamoto [OSY] などで提案されている: $\mathcal{F} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{S}\}$ とし, Λ とは $\mathcal{F}$ に応じて $\boldsymbol{p}$ もしくは t を表す記号とする[39]. 集合

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{F}}} \coloneqq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\widehat{\mathcal{F}}}(w_n)\Lambda^n \;\middle|\; w_n \in \mathfrak{H}^1 \right\}$$

を考えると, Λ 進調和関係式 (定理 3.4.13, 定理 4.4.12) によってここには $\mathbb{Q}$ 代数の構造が入り, さらに Λ 進位相によって位相的 $\mathbb{Q}$ 代数になる[40].

予想 4.3.8 (Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Conjecture 4.3], Jarossay [J5, Conjecture 5.3.2], Rosen [Ro2, Conjecture 2.3])**.** 位相的 $\mathbb{Q}$ 代数の同型であって $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})$ を $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ に, t を $\boldsymbol{p}$ に送るものが存在するであろう. とくに, $\boldsymbol{p}$ 進有限多重ゼータ値と t 進対称多重ゼータ値はまったく同じ関係式を満たすであろう.

4.4. t 進対称関係式.

t 進と書いたが, ここでは $\mathcal{S}_2$ や $\mathcal{S}_3$ に限定して知られている結果も記載する.

定理 4.4.1 (t 進対称和公式; Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.1])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\ldots,B_l} (-1)^{r-l} \prod_{i=1}^{l} (|B_i|-1)!\,\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}\left(\sum_{j\in B_i} k_j\right),$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(r)}) = \sum_{B_1,\ldots,B_l} \prod_{i=1}^{l} (|B_i|-1)!\,\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}\left(\sum_{j\in B_i} k_j\right)$$

が成り立つ. ここで $\{B_1, \ldots, B_l\}$ は $\{1, \ldots, r\}$ の分割全体を渡る.

Proof. 有限のケース (定理 3.2.23) と同様である. □

[39] この記号は Takeyama–Tasaka [TT] による. Ono–Sakurada–Seki [OSS] では x を用いていたが, 後述する多項式多重ゼータ値の形式的変数と混同しないためにこちらを採用した.

[40] 実際は $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{S}}} = (\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z})[\![t]\!]$ であることを Jarossay [J2, Proposition 5.5] が示している.

定理 4.4.2 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.4])．正の偶数 k と和が k になる正整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} - k\right)\mathfrak{z}_{\mathcal{S}_2}(k+1)t,$$
$$\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left((-1)^{k_1}k_2\binom{k+1}{k_1} - (-1)^{k_2}k_1\binom{k+1}{k_2} + k\right)\mathfrak{z}_{\mathcal{S}_2}(k+1)t$$

が成り立つ.

定理 4.4.3 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.6 (3.10), (3.11)])．正整数 k, r に対し

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{S}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{rk+r-1}\Bigg(& k\zeta(rk+1)t \\ &+ \left(\frac{k(rk+1)}{2}\zeta(rk+2) - k^2\sum_{l=1}^{r-1}\zeta(lk+1)\zeta((r-l)k+1)\right)t^2\Bigg),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{rk}\Bigg(& k\mathfrak{z}_{\mathcal{S}_3}(rk+1)t \\ &+ \left(\frac{k(rk+1)}{2}\zeta(rk+2) + k^2\sum_{l=1}^{r-1}\zeta(lk+1)\zeta((r-l)k+1)\right)t^2\Bigg)\end{aligned}$$

が成り立つ.

系 4.4.4 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Remark 3.7])．正の奇数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}_3}(\{k\}^r) = (-1)^{r-1}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_3}(\{k\}^r) = (-1)^r\frac{k(rk+1)}{2}\zeta(rk+2)t^2$$

が成り立つ.

系 4.4.5 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.6 (3.8), (3.9)])．正整数 k, r に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}_2}(\{k\}^r) = (-1)^{r-1}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(\{k\}^r) = (-1)^{rk+r-1}k\zeta(rk+1)t$$

が成り立つ.

定理 4.4.6 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 3.13])．和が偶数となる非負整数 k_1, k_2 に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}_2}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2}) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k_1}\binom{k_1+k_2+3}{k_2+2}\right)\zeta(k_1+k_2+3)t,$$
$$\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(\{1\}^{k_1},2,\{1\}^{k_2}) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k_1}\binom{k_1+k_2+3}{k_1+2}\right)\zeta(k_1+k_2+3)t$$

が成り立つ.

定理 4.4.7 (Bowman–Bradley 型定理: Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 4.1])．非負整数の組 $(k_1, k_2) \neq (0,0)$ に対し

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}}\zeta_{\mathcal{S}_2}(\{2\}^{n_1},1,\{2\}^{n_2},3,\ldots,\{2\}^{n_{2k_1-1}},1,\{2\}^{n_{2k_1}},3,\{2\}^{n_{2k_1+1}}) \\ &\quad= (-1)^{k_2}\left((-1)^{k_1}2^{1-2k_1}\binom{k_1+k_2}{k_1} - 4\binom{2k_1+k_2}{2k_1}\right)\zeta(4k_1+2k_2+1)t,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{2k_1+1}\geq 0\\ n_1+\cdots+n_{2k_1+1}=k_2}}\zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(\{2\}^{n_1},1,\{2\}^{n_2},3,\ldots,\{2\}^{n_{2k_1-1}},1,\{2\}^{n_{2k_1}},3,\{2\}^{n_{2k_1+1}}) \\ &\quad= (-1)^{k_1}2^{1-2k_1}\binom{k_1+k_2}{k_1}\zeta(4k_1+2k_2+1)t\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 4.4.8 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.2 (5.4), (5.5)])**.** 正整数 k, r $(k \geq r)$ に対し

$$T_{k,r} \coloneqq \sum_{\substack{B_1 \sqcup B_2 = \{1,\dots,r\} \\ B_1, B_2 \neq \varnothing}} \sum_{\substack{b_1+b_2=k \\ b_1 \geq |B_1|,\ b_2 \geq |B_2|}} \frac{b_1!b_2!}{(b_1-|B_1|)!(b_2-|B_2|)!}\zeta(b_1+1)\zeta(b_2+1)$$

としたとき

$$\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{S}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{k+r-1}\left(\binom{k}{r}\zeta(k+1)t + \left(\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\zeta(k+2) - \frac{1}{r!}T_{k,r}\right)t^2\right),$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{S}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{k}\left(\binom{k}{r}\zeta(k+1)t + \left(\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\zeta(k+2) + \frac{1}{r!}T_{k,r}\right)t^2\right)$$

が成り立つ.

系 4.4.9 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.2 (5.3)])**.** 正整数 k, r に対し

$$\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{S}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\binom{k}{r}\zeta(k+1)t$$

が成り立つ.

系 4.4.10 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Remark 5.3])**.** 正の奇数 k, r に対し

$$\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta_{\mathcal{S}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\sum_{\mathbf{k} \in I(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{S}_3}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\frac{k+1}{2}\binom{k}{r}\zeta(k+2)t^2$$

が成り立つ.

定理 4.4.11 (Ono–Sakurada–Seki [OSS, Theorem 5.4])**.** 正整数 k, r, i $(1 \leq i \leq r < k)$ に対し $b_{2;k,r,i}$, $b^{\star}_{2;k,r,i}$ を定理 3.4.12 で定めたものとすると

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_i(k,r)} \zeta_{\mathcal{S}_2}(\mathbf{k}) = (-1)^{r-1}\frac{b_{2;k,r,i}}{2}\zeta(k+1)t, \qquad \sum_{\mathbf{k} \in I_i(k,r)} \zeta^{\star}_{\mathcal{S}_2}(\mathbf{k}) = \frac{b^{\star}_{2;k,r,i}}{2}\zeta(k+1)t$$

が成り立つ.

定理 4.4.12 (t 進調和関係式; Jarossay [J5, Propisition 3.3.2 (ii), Proposition 3.4.1 (i)], Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Corollary 2.8])**.** インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k})\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{l})$$

が成り立つ.

Proof by Ono–Seki–Yamamoto. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \{\infty, -\infty\}$ 上の順序 $\prec$ を

- m, n が符号の等しい整数なら $m \prec n \Leftrightarrow m < n$.
- $\infty = -\infty$.
- m が正整数なら $m \prec \infty$.
- n が負整数なら $-\infty \prec n$.

で定めると

$$\zeta^{*}_{\widehat{\mathcal{S}},M}(k_1,\dots,k_r) = \sum_{\substack{n_1 \prec \cdots \prec n_r \\ 0<|n_1|,\dots,|n_r|<M}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_i^{k_i}(n_{i+1}+t)^{k_{i+1}}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

ということに他ならず, 右辺は多重調和和のケース (注意 2.3.36) と同様に調和関係式を満たすから定理 4.3.7 より目的の等式を得る. □

系 4.4.13 (t 進対蹠関係式)**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} (-1)^j \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}_{[i]})\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}}) = \delta_{\mathbf{k},\varnothing}$$

が成り立つ.

Proof. 定理 4.4.12 と系 1.3.6 より従う. □

定理 4.4.14 (t 進シャッフル関係式; Jarossay [J5, Propisition 3.3.2 (i), Proposition 3.4.1 (ii)], Ono–Seki–Yamamoto [OSY, Corollary 3.11])**.** インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}\,ш\,\mathbf{l})=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\sum_{\mathbf{e}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{l})}}b(\mathbf{l};\mathbf{e})\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k},\overleftarrow{\mathbf{l}\oplus\mathbf{e}})t^{\mathrm{wt}(\mathbf{e})}$$

が成り立つ.

定理 4.4.15 (t 進双対性; Takeyama–Tasaka [TT, Corollary 6.8], Hirose [Hi1])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k},\{1\}^n)t^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{\vee},\{1\}^n)t^n$$

が成り立つ.

定理 4.4.16 (t 進巡回和公式; Hirose–Murahara–Ono [HiMuOn1, Theorem 2.4, Theorem 6.1], Takeyama–Tasaka [TT, Corollary 6.11])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が 1 でない成分を持つとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)=\sum_{i=1}^{r}\Biggl(&\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]},k_i+1)+\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)\\&+\sum_{j=0}^{\infty}\Bigl(\zeta_{\mathcal{S}}(k_i+j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i-1]})+\zeta_{\mathcal{S}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})\Bigr)t^j\Biggr),\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},k_i-j)=k\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}\left(\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]},1)+\sum_{j=0}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{S}}}(j+1,\mathbf{k}^{[i]},\mathbf{k}_{[i]})t^j\right)$$

が成り立つ.

4.5. **対称多重ゼータ値の変種.**

4.5.1. 多項式多重ゼータ値. 以後 x,y を不定元とする.

定義 4.5.1 (Hirose–Murahara–Saito [HMS2, Definition 1.2])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{\bullet}_{x,y}(\mathbf{k};T)\coloneqq\sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta^{\bullet}(\mathbf{k}_{[i]};T)\zeta^{\bullet}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}};T)x^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_{[i]})}y^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{[i]})}$$

と定め, 多項式多重ゼータ値 (*polynomial multiple zeta value*) と呼ぶ.

この定義と $\mathfrak{H}^1$ の Hopf 代数構造 (命題 1.3.5) から調和関係式

$$\zeta^{*}_{x,y}(\mathbf{k}*\mathbf{l})=\zeta^{*}_{x,y}(\mathbf{k})\zeta^{*}_{x,y}(\mathbf{l})\qquad(\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{I}_0)$$

が成り立つことがわかる.

この対象を導入した [HMS2] では正規化定理の一般化が示されている: $\mathbb{R}(x,y)$ 線型写像 $\rho_{x,y}\colon\mathbb{R}(x,y)[T]\to\mathbb{R}(x,y)[T]$ を

$$\frac{\Gamma_0(-xX)\Gamma_0(-yX)}{\Gamma_0(-(x+y)X)}\exp(TX)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_{x,y}(T^n)}{n!}X^n$$

によって定める. Ihara–Kaneko–Zagier の正規化写像 ρ は $\rho_{1,0}$ と書けることに注意する.

定理 4.5.2 (Hirose–Murahara–Saito [HMS2, Theorem 1.5])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{ш}_{x,y}(\mathbf{k};T)=\rho_{x,y}(\zeta^{*}_{x,y}(\mathbf{k};T))$$

が成り立つ.

定義より $\zeta^{\bullet}_{1,0}(\mathbf{k};T)=\zeta^{\bullet}(\mathbf{k};T)$, $\zeta^{\bullet}_{1,-1}(\mathbf{k};T)=\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ が成り立つので, これは (正規化) 多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の共通の一般化である. この性質を用いて Hirose–Murahara–Saito [HMS3] では双方の和公式 (定理 2.3.6, 定理 4.2.17) を同時に含む一般化を得ている: 形式的冪級数

$$\psi_0(W)=\sum_{k=2}^{\infty}\zeta(k)W^{k-1}$$

を定義しておくと, 多重ゼータ値の和公式は母関数を用いて

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathcal{I}_0\\ a\ge 2}}\zeta(\mathbf{k},a)A^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}W^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+a}=\frac{W}{1-A}(\psi_0(W)-\psi_0(AW))$$

であり, 対称多重ゼータ値のほうは

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{I}_0\\ a\ge 2}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k},a,\mathbf{l})A^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}B^{\mathrm{dep}(\mathbf{l})}W^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+a+\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\\ &=-\frac{W}{1-B}(\psi_0((1-A)W)-\psi_0((B-A)W))+\frac{W}{1-A}(\psi_0((1-B)W)-\psi_0((A-B)W))\end{aligned}$$

と書けることに注意する ([HMS3, Proposition 1.6, Proposition 1.7]).

定理 4.5.3. 冪級数の等式

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{I}_0\\ a\ge 2}}\zeta^{*}_{x,y}(\mathbf{k},a,\mathbf{l};T)A^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}B^{\mathrm{dep}(\mathbf{l})}W^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+a+\mathrm{wt}(\mathbf{l})}\\ &=\frac{yW}{1-B}(\psi_0(y(1-A)W)-\psi_0(y(B-A)W))\frac{\Gamma_0(xW)\Gamma_0(yW)}{\Gamma_0(x(1-A)W)\Gamma_0(y(1-A)W)}\exp((x+y)ATW)\\ &\quad+\frac{xW}{1-A}(\psi_0(x(1-B)W)-\psi_0(x(A-B)W))\frac{\Gamma_0(xW)\Gamma_0(yW)}{\Gamma_0(x(1-B)W)\Gamma_0(y(1-B)W)}\exp((x+y)BTW)\end{aligned}$$

が成り立つ.

4.5.2. *Refined* 対称多重ゼータ値. ここでは Hirose [Hi3] によって導入された *refined* 対称多重ゼータ値 (*RSMZV*) について紹介する[41]. まず §2.2 で用いた反復積分を一般の path で考える: 連続写像 $[0,1]\to\mathbb{C}$ が *piecewise smooth* であるとは, 複素数 $0=a_0<\cdots<a_{n+1}=1$ が存在して $[a_i,a_{i+1}]$ $(i\in\{0,\ldots,n\})$ 上で滑らかであることをいう. また, $\mathbb{C}$ 上の接基点 (*tangential base point*) とは点 $p\in\mathbb{C}$ と p 上の 0 でない接ベクトル $v\in T_p\mathbb{C}$ 上の組のことであり, これをしばしば v_p と書く (接ベクトルは自然に $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の元と同一視できる.). 接基点 v_p, w_q と $M\subseteq\mathbb{C}$ に対し, 始点 v_p から終点 w_q への M 上の *path*[42] とは区分的に滑らかな写像 $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ であって $0<t<1$ ならば $\gamma(t)\in M$ であり,

$$\gamma(0)=p,\quad \gamma(1)=q,\qquad \lim_{t\searrow 0}\frac{\gamma(t)-p}{t}=v,\quad \lim_{t\nearrow 1}\frac{q-\gamma(t)}{1-t}=-w$$

を満たすものである. 始点 $\tilde{p}$ と終点 $\tilde{q}$ を固定したとき, M 上の path のホモトピー類の集合を $\pi_1(M;\tilde{p},\tilde{q})$ と書く. 接基点 $\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r}$ に対し, path の合成 $\pi_1(M;\tilde{p},\tilde{q})\times\pi_1(M;\tilde{q},\tilde{r})\ni(\gamma_1,\gamma_2)\mapsto\gamma_1\gamma_2\in\pi_1(M;\tilde{p},\tilde{r})$ と path の反転 $\pi_1(M;\tilde{p},\tilde{q})\ni\gamma\mapsto\gamma^{-1}\in\pi_1(M;\tilde{q},\tilde{p})$ が well-defined に定まる[43]. $\tilde{p}=v_p$, $\tilde{q}=w_q$ を接基点, $[\gamma]\in\pi_1(M;\tilde{p},\tilde{q})$ をある path のホモトピー類, $w=e_{a_1}\cdots e_{a_n}$ を $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}\coloneqq\mathbb{Q}\langle e_z\mid z\in\mathbb{C}\rangle$ の word としたとき, 多項式 $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ と $J>0$ が存在して

$$\int_{\varepsilon<t_1<\cdots<t_n<1-\varepsilon}\prod_{i=1}^{n}\frac{d\gamma(t_i)}{\gamma(t_i)-a_i}=P(\log\varepsilon)+O(\varepsilon\log^{J}\varepsilon)\qquad(\varepsilon\to 0)$$

[41] もちろん日本語にすれば "精密化対称多重ゼータ値" のようになるのであろうが, Kaneko–Zagier 予想の精密化 (予想 4.3.8), などといえば "SMZV $\to$ RSMZV" ではなく "SMZV $\to$ t-adic SMZV" を指すため, 別方向の一般化に対する差別化を図るべく英語のままにした.

[42] これは通常 *clean path* と呼ばれる特殊な path であるが, 今は clean なものしか扱わない. 一般の path は道の途中でも $\mathbb{C}\setminus M$ の点を有限回なら通ってもよい (そこに差し込む接ベクトルと出ていく接ベクトルは一致している必要がある.).

[43] 合成はそれほど自明ではない: clean path 同士の合成は接基点を経由していると clean になるとは限らず, したがって cusp を回避する手続きが必要になるが, それをホモトピー類のレベルで考えると迂回に用いたパラメータに依存せず, clean path を代表元にとっても問題ないということになる. 詳細は Yamamoto [Y4, pp. 3–4], Gil–Fresán [GF, §3.7.3] を参照.

となり, P は代表元 γ の取り方に依らず一意に定まる ([GF, Lemma 3.238]). このとき正規化反復積分 (*regularized iterated integral*) を

$$I_\gamma(\tilde{p}; w; \tilde{q}) \coloneqq P(0)$$

と定め, $\mathbb{Q}$ 線型写像 $I_\gamma(\tilde{p}; -; \tilde{q})\colon \mathfrak{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ へ拡張しておく. 次の定理は正規化反復積分の基本性質である:

定理 4.5.4. $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ を接基点 $\tilde{p}, \tilde{q}$ を端点にもつ path であって $\gamma_1\gamma_2$ が定義できるものとする. このとき $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ に対し $w = e_{a_1} \cdots w_{a_n} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ と書くと次が成り立つ (反復積分の端点は略してある):

反転公式:

$$I_\gamma(w) = (-1)^n I_{\gamma^{-1}}(\overleftarrow{w}).$$

シャッフル関係式: 定義 1.4.1 と同様にして $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ にシャッフル積を導入したとき, w, $w' \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ に対し

$$I_\gamma(w) I_\gamma(w') = I_\gamma(w \mathbin{ш} w').$$

path 合成公式:

$$\sum_{i=0}^{n} I_{\gamma_1}(e_{a_1} \cdots e_{a_i}) I_{\gamma_2}(e_{a_{i+1}} \cdots e_{a_n}) = I_{\gamma_1\gamma_2}(w).$$

以後 $\widetilde{0} \coloneqq 0_1$, $\widetilde{1} \coloneqq (-1)_1$ と書く. $\pi_1(M; \widetilde{0}, \widetilde{1})$ の元である直線 path $t \mapsto t$ (のホモトピー類) を dch と書くことにすると, 定義よりインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta^{ш}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} I_{\mathrm{dch}}(\widetilde{0}; z_{\mathbf{k}}; \widetilde{1})$$

が成り立つ. ゆえにシャッフル正規化多重ゼータ値の準同型性は正規化反復積分のシャッフル関係式に由来しているとも思える.

定義 4.5.5 (Refined 対称多重ゼータ値; Hirose [Hi3, Definition 2])**.** $\alpha \in \pi_1(M; \widetilde{0}, \widetilde{0})$ を 1 周りを反時計回りに一周する path とし, $\beta = \mathrm{dch} \cdot \alpha \cdot \mathrm{dch}^{-1}$ と書く. このときインデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k}) \coloneqq \frac{(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}}{2\pi i} I_\beta(\widetilde{1}; z_{\mathbf{k}} e_1; \widetilde{1})$$

と定め, refined 対称多重ゼータ値と呼ぶ.

path 合成公式により RSMZV は正規化多重ゼータ値による明示公式をもつ.

命題 4.5.6 (Hirose [Hi3, Proposition 4])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{0 \le a \le b \le \mathrm{dep}(\mathbf{k}) \\ a < j \le b \implies k_j = 1}} \frac{(-2\pi i)^{b-a}}{(b-a+1)!} (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{[b]})} \zeta^{ш}(\mathbf{k}_{[a]}) \zeta^{ш}(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[b]}})$$

が成り立つ.

このことから RSMZV は常に $\mathcal{Z}[2\pi i]$ の元であり, この表示の定数項をとる $(\mathrm{mod}\ 2\pi i)$ ことで $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ に一致することがわかる (lifting property, [Hi3, Corollary 6]). また, 正規化反復積分の反転公式, 変数変換より次がわかる:

定理 4.5.7 (Hirose [Hi3, Theorem 10])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} \overline{\zeta_{\mathcal{RS}}(\overleftarrow{\mathbf{k}})}$$

が成り立つ. ここで上付きの横線は複素共役である.

定理 4.5.8 (Hirose [Hi3, Theorem 10])**.** インデックス $\mathbf{k}$ に対し

$$\sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{l}} \zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{l}) = (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})} \overline{\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k})}$$

が成り立つ.

これらにおいて mod $2\pi i$ をとることで対称多重ゼータ値の反転公式 (定理 4.2.14), Hoffman 双対性 (定理 4.2.15) が証明できる (後者は注意 3.2.22 を用いる). また, 反復積分のシャッフル関係式を I_β に適用し, 実部を取ることで対称多重ゼータ値のシャッフル関係式 (定理 4.2.13) を示すこともできる.

なお, RSMZV の母関数は KZ 結合子で書くことができる: 詳細は省略するが,

$$\Phi_{\mathrm{Ad,exp}}(e_0, e_1) \coloneqq \Phi_{\mathrm{KZ}}(e_1, e_0) \exp(2\pi i e_1) \Phi_{\mathrm{KZ}}(e_0, e_1)$$

とおくことで $\langle \Phi_{\mathrm{Ad},\exp}(e_0,e_1),\ z_{\mathbf{k}}e_1\rangle = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})+\mathrm{dep}(\mathbf{k})}2\pi i\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k})$ となることが示せる ([Hi3, (4.1)]. Jarossay [J4, Definition A.1.2. (i)] はこれを定義として採用している.). さらに, その表示と正規化定理, ガンマ関数の相反公式 $(\Gamma(X)\Gamma(1-X)=\pi/\sin\pi X)$ を用いることで

$$\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_{[i]})}\zeta^*\left(\mathbf{k}_{[i]};-\frac{\pi i}{2}\right)\zeta^*\left(\overleftarrow{\mathbf{k}^{[i]}};\frac{\pi i}{2}\right)$$

という表示を持つことがわかる. この表示は非常に有用である: たとえば $\zeta^*(\mathbf{k};T)$ が調和関係式を満たすことと $\mathfrak{H}^1$ の Hopf 代数構造 (命題 1.3.5) を用いることで

$$\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k}*\mathbf{l}) = \zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{k})\zeta_{\mathcal{RS}}(\mathbf{l}) \qquad (\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathcal{I}_0)$$

が成り立つ ([Hi3, Theorem 8]). 以上に述べたことから, RSMZV は調和関係式, シャッフル関係式, 双対性といった対称多重ゼータ値の満たす関係式を一身に背負った重要な対象であることがわかる (対称多重ゼータ値の関係式は $\zeta^*_{\mathcal{S}}$ や $\zeta^{ш}_{\mathcal{S}}$ といった "各々の関係式にふさわしい variant" のレベルで示してから mod $\zeta(2)$ で一つの対象へと還元していたことに注意.).

References

[AKO] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, *A generating function for sums of multiple zeta values and its applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 387–395.

[AO] T. Aoki and Y. Ohno, *Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **41** (2005), 329–337.

[AK] T. Arakawa and M. Kaneko, 多重ゼータ値入門, MI Lecture Note **23**, Kyushu University, 2010.

[BKSYY] H. Bachmann, S. Kadota, Y. Suzuki, S. Yamamoto and Y. Yamasaki, *Sum formulas for zeta values of multiposets*, in preparation.

[BY] H. Bachmann and Y. Yamasaki, *Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values*, Math. Z. **290** (2018), 1173–1197.

[BCJXXZ] S. Berger, A. Chandra, J. Jain, D. Xu, C. Xu and J. Zhao, *Proof of Kaneko-Tsumura Conjecture on Triple T-values*, preprint, `arXiv:2011.02393`.

[BB1] D. Bowman and D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), 43–61.

[BB2] D. Bowman and D. M. Bradley, *Resolution of some open problems concerning multiple zeta evaluations of arbitrary depth*, Compos. Math. **139** (2003), 85–100.

[BBB] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, *Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k*, Electronic J. Combinatorics **4**(2) (1997), R5.

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk, *Combinatorial aspects of multiple zeta values*, Electronic J. Combinatorics **5** (1998), R38.

[BZ] D. M. Bradley and X. Zhou, *On Mordell–Tornheim sums and multiple zeta values*, Ann. Sci. Math. Québec **34** (2010), 15–23.

[BMS] P. L. Butzer, C. Markett and M. Schmidt, *Stirling numbers, central factorial numbers, and representations of the Riemann zeta functions*, Results Math. **19** (1991), 257–274.

[BTT1] H. Bachmann, Y. Takeyama and K. Tasaka, *Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values*, Compos. Math. **154** (2018), 2701–2721.

[BTT2] H. Bachmann, Y. Takeyama and K. Tasaka, *Finite and symmetric Mordell–Tornheim multiple zeta values*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[C1] S. Charlton, *The alternating block decomposition of iterated integrals, and cyclic insertion on multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1703.03784`.

[C2] S. Charlton, *Bowman–Bradley type identities for symmetrised MZV's*, MZV Days at HIM, 2018.

[CCE] K-W. Chen, C-L. Chung, and M. Eie, *Sum formulas and duality theorems of multiple zeta values*, J. Number Theory **158** (2016), 33–53.

[DG] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.

[D] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[Ec] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes*, Tome II, Publ. Math. d'Orsay (1981), no. 6.

[Ei] M. Eie, *The theory of multiple zeta values with applications in combinatorics*, Monograph in Number Theory 7, World Scientific, Singapore, 2013.

[ELO1] M. Eie, W-C. Liaw and Y. L. Ong, *A restricted sum formula among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 908–921.

[ELO2] M. Eie, W-C. Liaw and Y. L. Ong, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **9** (2013), 1185–1198.

[EM] S. Eilenberg and S. Mac Lane, *On the Groups $H(\Pi,n)$, I*, Annals of Math. **58** (1953), 55–106.

[FK] K. Fujita and Y. Komori, *A Congruence Between Symmetric Multiple Zeta-Star Values and Multiple Zeta-Star Values*, Kyushu J. Math. **75** (2021), 149–167.

[F1] H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **39** (2003), 695–720.

[F2] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Math. **171** (2010), 545–556.

[F3] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Math. **174** (2011), 341–360.

[F4] H. Furusho, *The pentagon equation and the confluence relations*, preprint, `arXiv:1809.00789`.

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, in Automorphic Forms and Zeta Functions, S. Böcherer et. al. (eds.), World Scientific, Singapore, 2006, pp. 71–106.

[GF] J. I. B. Gil and J. Fresan, *Multiple Zeta Values: From Numbers to Motives*, to appear in Clay Math. Proc.

[Go1] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, preprint, `arXiv:math/0103059`.

[Go2] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, `arXiv:math/0202154`.

[Gr] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Math. Soc. Lecture Note Series 247, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 95–101.

[GX] L. Guo and B. Xie, *Weighted sum formula for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2747–2765.

[Ha] R. Harada, *KZ* 方程式と *KZ* 結合子, 第 26 回整数論サマースクール報告集, no. 3, 2019.

[HHT] Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood and R. Tauraso, *New properties of multiple harmonic sums modulo p and p-analogues of Leshchiner's series*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 3131–3159.

[Hi1] M. Hirose, *On the t-adic duality*, unpublished note.

[Hi2] M. Hirose, 多重ゼータ値公式集, 第 26 回整数論サマースクール報告集, 2019.

[Hi3] M. Hirose, *Double shuffle relations for refined symmetric multiple zeta values*, Doc. Math. **25** (2020), 365–380.

[HIMS] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara and S. Saito, *Ohno-type relations for classical and finite multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1806.09299`.

[HIST] M. Hirose, K. Iwaki, N. Sato and K. Tasaka, *Duality/sum formulas for iterated integrals and their application to multiple zeta values*, J. Number Theory **195** (2019), 72–83.

[HiMuOn1] M. Hirose, H. Murahara and M. Ono, *On variants of symmetric multiple zeta-star values and the cyclic sum formula*, Ramanujan J. (2021).

[HiMuOn2] M. Hirose, H. Murahara and M. Ono, *Ohno-type relation for interpolated multiple zeta values*, preprint, `arXiv:2103.14851`.

[HMOS] M. Hirose, H. Murahara, T. Onozuka and N. Sato, *Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values*, Indag. Math. (N. S.) **31** (2020), 556–567.

[HMS1] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, *Generating functions for Ohno-type sums of finite and symmetric multiple zeta-star values*, preprint, `arXiv:1905.04875`.

[HMS2] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, *Weighted sum formulas for multiple harmonic sums modulo primes*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 3357–3366.

[HMS2] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, *Polynomial generalization of the regularization theorem for multiple zeta values*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **56** (2020), 207–215.

[HMS3] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, *Generating functions for sums of polynomial multiple zeta values*, to appear in Tohoku Math. J.

[HMS4] M. Hirose, H. Murahara and S. Saito, *Ohno relation for regularized multiple zeta values*, preprint, `arXiv:2105.09631`.

[HS1] M. Hirose and N. Sato, *Hoffman's conjectural identity*, Int. J. Number Theory **15** (2019), 167–171.

[HS2] M. Hirose and N. Sato, *Iterated integrals on* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty, z\}$ *and a class of relations among multiple zeta values*, Adv. in Math. **342** (2019), 163–182.

[HS3] M. Hirose and N. Sato, *Block shuffle identities for the multiple zeta values*, in preparation.

[HSS] M. Hirose, N. Sato and S. Seki, *The connector for Double Ohno relation*, to appear in Acta Arithmetica.

[Ho1] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.

[Ho2] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[Ho3] M. E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 49–68.

[Ho4] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345—366.

[Ho5] M. E. Hoffman, *On multiple zeta values of even arguments*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 705–716.

[Ho6] M. E. Hoffman, *An odd variant of multiple zeta values*, Commun. Number Theory Phys. **13** (2019), 529–567.

[HO] M. E. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262** (2003), 332–347.

[HoMuOy] Y. Horikawa, H. Murahara and K. Oyama, *A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1809.08389`.

[HWN] J. G. Huard, K. S. Williams and Z. Nan-Yue, *On Tornheim's double series*, Acta Arithmetica **75** (1996), 105–117.

[I1] M. Igarashi, *Cyclic sum of certain parametrized multiple series*, J. Number Theory **131** (2011), 508–518.

[I2] M. Igarashi, *A generalization of Ohno's relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **132** (2012), 565–578.

[IKOO] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values*, J. Algebra **332** (2011), 187–208.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[ITTW] K. Imatomi, T. Tanaka, K. Tasaka and N. Wakabayashi, *On some combinations of multiple zeta-star values*, preprint, `arXiv:0912.1951`.

[J1] D. Jarossay, *Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I **352** (2014), 767–771.

[J2] D. Jarossay, *Depth reductions for associators*, J. Number Theory **217** (2020), 163–192.

[J3] D. Jarossay, *An explicit theory of $\pi_1^{\mathrm{un,crys}}(\mathbb{P}^1-\{0,\mu_N,\infty\})$ - II-1 : Standard algebraic equations of prime weighted multiple harmonic sums and adjoint multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1412.5099v3`.

[J4] D. Jarossay, *Adjoint cyclotomic multiple zeta values and cyclotomic multiple harmonic values*, preprint, `arXiv:1412.5099v4`.

[J5] D. Jarossay, *Adjoint cyclotomic multiple zeta values and cyclotomic multiple harmonic values*, preprint, `arXiv:1412.5099v5`.

[Kad] S. Kadota, *Certain weighted sum formulas for multiple zeta values with some parameters*, Comment. Univ. St. Pauli **66** (2017), 1–13.

[Kam1] K. Kamano, *Finite Mordell–Tornheim multiple zeta values*, Funct. Approx. Comment. Math. **54** (2015), 65–72.

[Kam2] K. Kamano, *Weighted sum formulas for finite multiple zeta values*, J. Number Theory **192** (2018), 168–180.

[Kan1] M. Kaneko, 多重ゼータ値入門–定義から正規化まで–, 第 26 回整数論サマースクール報告集, no. 1, 2018.

[Kan2] M. Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, Publ. Math. Besançon (2019), no. 1, pp. 103–129.

[KMM] M. Kaneko, H. Murahara and T. Murakami, *Quasi-derivation relations for multiple zeta values revisited*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **90** (2020), 151–160.

[KS] M. Kaneko and M. Sakata, *On multiple zeta values of extremal height*, Bull. Aust. Math. Soc. **93** (2016), 186–193.

[KOS] M. Kaneko, K. Oyama and S. Saito, *Analogues of the Aoki–Ohno and Le–Murakami relations for finite multiple zeta values*, Bull. Aust. Math. Soc. **100** (2019), 34–40.

[KT] M. Kaneko and H. Tsumura, *On multiple zeta values of level two*, Tsukuba J. Math. **44** (2020), 213–234.

[KXY] M. Kaneko, C. Xu and S. Yamamoto, *A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values*, preprint, `arXiv:2011.14338`.

[KY] M. Kaneko and S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, Selecta Math. (N. S.) **24** (2018), 2499–2521.

[KZ] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[KMS] H. Kawamura, T. Maesaka and S. Seki, *Multivariable connected sums and multiple polylogarithms*, preprint, `arXiv:2103.05492`.

[Kawasa] N. Kawasaki, *Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values*, Doctoral dissertation in Tohoku University, 2019.

[Kawash] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[KO] N. Kawasaki and K. Oyama, *Cyclic sum of finite multiple zeta values*, Acta Arithmetica **195** (2020), 281–288.

[KMT1] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Shuffle products of multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems*, Math. Z. **268** (2011), 993–1011.

[KMT2] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems*, Funct. Approx. Comment. Math. **51** (2014), 43–76.

[KST] H. Kondo, S. Saito and T. Tanaka, *The Bowman–Bradley theorem for multiple zeta-star values*, J. Number Theory **132** (2012), 1984–2002.

[LM1] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of the multiple zeta functions*, Topology Appl. **62** (1995), 193–206.

[LM2] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 39–65.

[L1] Z. Li, *Gamma series associated to elements satisfying regularized double shuffle relations*, J. Number Theory **130** (2010), 213–231.

[L2] Z. Li, *Higher order shuffle regularization of multiple zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 2321–2333.

[L3] Z. Li, *On a conjecture of Kaneko and Ohno*, Pacific J. Math. **257** (2012), 419–430.

[L4] Z. Li, *Algebraic relations of interpolated multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1904.09887`.

[LQ1] Z. Li and C. Qin, *Some relations of interpolated multiple zeta values*, Internat. J. Math. **28** (2017), art. 175033 (25 pp).

[LQ2] Z. Li and C. Qin, *Some relations deduced from regularized double shuffle relations of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **17** (2021), 91–146.

[Mat] K. Matsumoto, *On Mordell–Tornheim and other multiple zeta-functions*, in Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Math. Schriften 360, Univ. Bonn, Bonn, 2003, n. 25 (17 pp.).

[Mac1] T. Machide, *Some restricted sum formulas for double zeta values*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **89** (2013), 51–54.

[Mac2] T. Machide, *Identities involving cyclic and symmetric sums of regularized multiple zeta values*, Pacific J. Math. **286** (2017), 307–359.

[Mac3] T. Machide, *Identity involving symmetric sums of regularized multiple zeta-star values*, Mosc. J. Comb. Number Theory **8** (2019), 125–136.

[Mo] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 368–371.

[Mun1] S. Muneta, *On some explicit evaluation of multiple zeta-star values*, J. Number Theory **128** (2008), 2538–2548.

[Mun2] S. Muneta, *Algebraic setup of non-strict multiple zeta values*, Acta Arithmetica **136** (2009), 7–18.

[Murah1] H. Murahara, *A note on finite real multiple zeta values*, Kyushu J. Math. **70** (2016), 197–204.

[Murah2] H. Murahara, *Derivation relations for finite multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.

[Murah3] H. Murahara, *A note on Ohno sums for multiple zeta values*, preprint, `arXiv:2102.12177`.

[MOno] H. Murahara and M. Ono. *Yamamoto's interpolation of finite multiple zeta and zeta-star values*, Tokyo J. Math. Advance Publication (2021), 1–28.

[MOnoz1] H. Murahara and T. Onozuka, *Derivation relation for finite multiple zeta values in $\widehat{\mathcal{A}}$*, J. Aust. Math. Soc. **110** (2021), 260–265.

[MOnoz2] H. Murahara and T. Onozuka, *Connectors of the Ohno relation for parametrized multiple zeta series*, preprint, `arXiv:2012.00285`.

[MOS] H. Murahara, T. Onozuka and S. Seki, *Bowman–Bradley type theorem for finite multiple zeta values in $\mathcal{A}_2$*, Osaka J. Math. **57** (2020), 647–653.

[MS] H. Murahara and M. Sakata, *On multiple zeta values and finite multiple zeta values of maximal height*, Int. J. Number Theory **14** (2018), 975–987.

[MM] H. Murahara and T. Murakami, *On a generalization of a restricted sum formula for multiple zeta values and finite multiple zeta values*, J. Aust. Math. Soc. **101** (2020), 23–34.

[Murak] T. Murakami, *On some relations and generators of multiple zeta values*, Doctoral dissertation in Kyushu University, 2020.

[N] T. Nakamura, *Restricted and weighted sum formulas for double zeta values of even weight*, Šialiai Math. Semin. **4** (**12**) (2009), 151–155.

[NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki, *On Schur multiple zeta functions: a combinatoric generalization of multiple zeta functions*, Adv. in Math. **333** (2018), 570–619.

[Oh] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[OW] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arithmetica **123** (2006), 289–295.

[OZa] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math. (N. S.) **12** (2001), 483–487.

[OZu] Y. Ohno and W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.

[On1] M. Ono, *Finite multiple zeta values associated with* 2*-colored rooted trees*, J. Number Theory **181** (2017), 99–116.

[On2] M. Ono, 「多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ, 第 26 回整数論サマースクール報告集, no. 5, 2019.

[OSS] M. Ono, K. Sakurada and S. Seki, *A note on $\mathcal{F}_n$-multiple zeta values*, preprint, `2103.03470`.

[OSY] M. Ono, S. Seki and S. Yamamoto, *Truncated t-adic symmetric multiple zeta values and double shuffle relations*, Res. Number Theory **7** (2021), art. 15 (28 pp).

[Oy] K. Oyama, *Ohno-type relation for finite multiple zeta values*, Kyushu J. Math. **72** (2018), 277–285.

[P] M. Pallewatta, *On sum formulas for Mordell–Tornheim zeta values*, Rocky Mountain J. Math. **50** (2020), 225–235.

[Q] Q, *Mordell–Tornheim* 型多重ゼータ値について, Math Advent Calendar 2020, no. 11.

[Ra] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. IHES **95** (2002), 185–231.

[Re] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, Oxford, 1993.

[Ro1] J. Rosen, *Asymptotic relations for truncated multiple zeta values*, J. London Math. Soc. (2) **91** (2015), 554–572.

[Ro2] J. Rosen, *The completed finite period map and Galois theory of supercongruences*, Int. Math. Res. Notices 2019, 7379–7405.

[RSS] G-C. Rota, B. Sagan, P. R. Stein, *A cyclic derivative in noncommutative algebra*, J. Algebra **64** (1980) 54–75.

[SW1] S. Saito and N. Wakabayashi, *Sum formula for finite multiple zeta values*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1069–1076.

[SW2] S. Saito and N. Wakabayashi, *Bowman–Bradley type theorem for finite multiple zeta values*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 241–251.

[SS] K. Sakugawa and S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, J. Algebra **469** (2017), 323–357.

[Sa] N. Sato, *From the* 2-1 *formula for the multiple zeta values to iterated beta integrals*, note of JENTE Seminar, 2020.

[Se1] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, Doctoral dissertation in Osaka University, 2017.

[Se2] S. Seki, 「$\mathcal{F}$-有限多重ゼータ値」から「$\widehat{\mathcal{F}}$-有限多重ゼータ値」へ*: ただし, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$*, 第 26 回整数論サマースクール報告集, no. 7, 2019.

[Se3] S. Seki, *The* $\boldsymbol{p}$*-adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, Tohoku Math. J. (2) **71** (2019), 111–122.

[Se4] S. Seki, *Connectors*, RIMS Kôkyûroku **2160** (2020), 15–27.

[Se5] S. Seki, 有限多重ポリログとその関数等式, in Algebraic Number Theory and Related Topics (Kyoto, 2016), Y. Ohno et. al. (eds.), RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B77** (2020), 225–238.

[SY1] S. Seki and S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. Number Theory **15** (2019), 1261–1265.

[SY2] S. Seki and S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), 673–686.

[Sw] M. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[Tak] Y. Takeyama, *On a weighted sum of multiple T-values of fixed weight and depth*, preprint, `arXiv:2012.11063`.

[TT] Y. Takeyama and K. Tasaka, *Supercongruences of multiple harmonic q-sums and generalized finite/symmetric multiple zeta values*, preprint, `arXiv:2012.07067`.

[Tan1] T. Tanaka, *A few applications of shuffle products for p-adic multiple zeta values*, Master's thesis in Kyushu University, 2004.

[Tan2] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2021–2034.

[Tan3] T. Tanaka, *Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values*, preprint, `arXiv:1303.0398`.

[TW1] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra **323** (2010), 766–778.

[TW2] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *Kawashima's relations for interpolated multiple zeta values*, J. Algebra **447** (2016), 424–431.

[Te] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[To] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math. **72** (1950), 303–314.

[Wak] N. Wakabayashi, *Double shuffle and Hoffman's relations for interpolated multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 2245–2251.

[Was] L. C. Washington, *p-adic L-functions and sums of powers*, J. Number Theory **69** (1998), 50–61.

[Y1] S. Yamamoto, *Explicit evaluation of certain sums of multiple zeta-star values*, Funct. Approx. Comment. Math. **49** (2013), 283–289.

[Y2] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Algebra **385** (2013), 102–114.

[Y3] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, in Various Aspects of Multiple Zeta Values (Kyoto, 2013), K. Ihara (ed.), RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B68** (2017), 3–14.

[Y4] S. Yamamoto, 多重ゼータ値と $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群, 第 26 回整数論サマースクール報告集, no. 10, 2019.

[Y5] S. Yamamoto, *Duality of one-variable multiple polylogarithms and their q-analogues*, preprint, `arXiv:2010.05505`.

[Yas] S. Yasuda, *Finite real multiple zeta values generate the whole space Z*, Int. J. Number Theory **12** (2016), 787–812.

[YZ] H. Yuan and J. Zhao, *Restricted sum formula of multiple zeta values*, Funct. Approx. Comment. Math. **51** (2014), 111–119.

[Za1] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497–512.

[Za2] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values* $\zeta(2, \ldots, 2, 3, 2, \ldots, 2)$, Annals of Math. **175** (2012), 977–1000.

[Zh1] J. Zhao, *Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums*, Int. J. Number Theory **4** (2008), 73–106.

[Zh] J. Zhao, *Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta star values*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), 1669–1694.

[ZC] X. Zhou and T. Cai, *A generalization of a curious congruence on harmonic sums*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1329–1333.

[Zl] S. A. Zlobin, *Generating functions for a multiple zeta function* (Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **73** (2005), 55–59.

(Hanamichi Kawamura) Department of Mathematics, Faculty of Science Division I, Tokyo University of Science, 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan

Email address: `1121026@ed.tus.ac.jp`