第34回数学カフェ予習会

微分と代数学のつながり

本日の内容

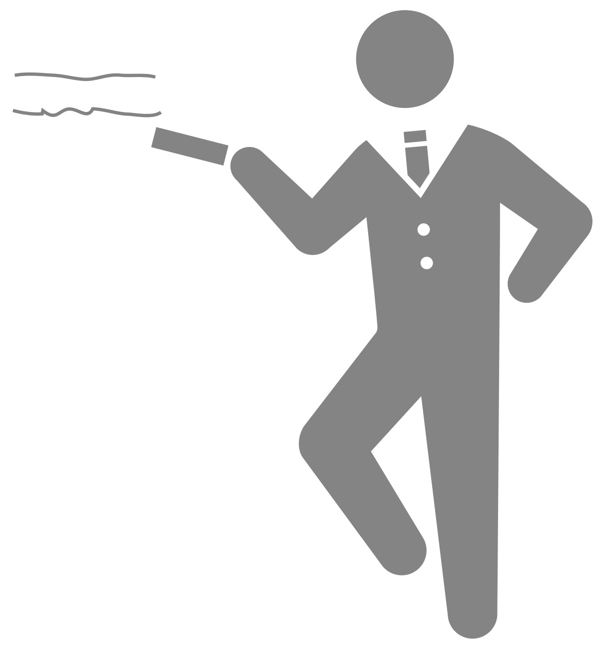
- 代数学イントロ
  - 群・環・体
  - 具体例色々
- 微分と代数学のつながり

まずは身近な話から

- 三年B組　金八先生いわく
  - 人という字は、人と人が支え合って出来ている

人

一般化好きのｎ年ｍ組金ｘ先生現る



数学徒は一般化したい

- 同様の構造を持つ漢字はあるか？

  （同じ記号2つ重ねる漢字を理義字というらしい）

- 3つ重ねる文字は？4つでは？と拡張したくなる

- 文字と文字とのつながり方にはバリエーションがあるのでは？

  人という漢字を構成するようなつながり方の特徴は何なのか？

数学徒は一般化したい

類似のものを探す

同じ形2つ重ねる漢字の集まり
人、林、弱

n=2

同じ形3つ重ねる漢字の集まり
品、晶、轟

n=3

同じ形4つ重ねる漢字の集まり

n=4

…

値を増やす・一般化する

数学徒は一般化したい

対応付け方のバリエーションを考えて、より広い枠組みを考える

漢字のパーツの集まり

片方が片方を支えるタイプ

人
入

横一列に並ぶタイプ

林
弱

組み合わせて

更に別の漢字が作れそう

代数学でよく登場するもの

- ものの集まり（集合）
- 集合に入る構造（演算）
- 集合の間の写像（の集まり）

今日のはなし

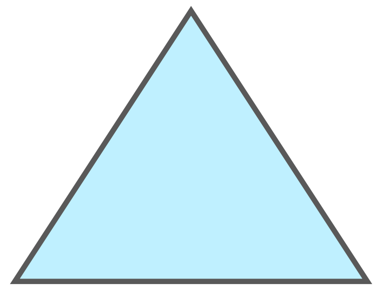
- ものの集まりに構造を入れる
- 同じ構造を持つ別のものとの類似を見る
- ものの集まり同士のつながりを見る
- 微分を↑の視点から見る
- （次回は、ある特別なつながり方を持ったものに注目する）

前回の予習会より

集合とその構造

集合の要素同士に様々な関係性（構造と呼ぶ）を入れると、その関係性に特有の性質が現れる

要素のラベルではなく構造に注目して一般化できる

$1, 2, 3 \leftrightarrow$  $\leftrightarrow$ 文字列あいう

代数的構造とは、集合の上に定まる演算によって生まれる
要素同士の関係性のこと

様々な数の集合と代数的構造

- 整数　：＋, −, ×
- 有理数：＋, −, ×, ÷
- 実数　：＋, −, ×, ÷
- 複素数：＋, −, ×, ÷
- 有限体：＋, −, ×, ÷

1 ÷ 2=1/2は整数に含まれない

実数の集合を$\mathbb{R}$と書くとする

例）集合の要素の数が有限個で
$\{1, p, p^2, \cdots, p^{n-1}\}, p^n=1$

集合 X に(二項※)演算 ∘ が定められていて、その演算の結果も Xに含まれるとする。このとき(X, ∘)は代数系であるという。このセミナーでは、演算とは二項演算を指すものとする

※二項演算とは、2つの値を入れて、1つの値を返す計算の規則のことをさす

群（ぐん）

代数系$(X, \circ)$が以下を満たすとき群という※

1. その演算に対して結合法則が成り立つ※2

　　任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ が成り立つ

2. 単位元が存在する

　　任意の $x \in X$ に対し、$e \circ x = x \circ e$ となる共通の元 $e \in X$ が存在する

　　=x （誤植でした）

3. 逆元が存在する

　　任意の $x \in X$ に対し、$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1}$ となる元 $x^{-1} \in X$ が存在する

　　=1 （誤植でした）

4. さらに演算が可換であるとき、可換群（またはアーベル群）という

　　任意の $x,y \in X$ に対し、$x \circ y = y \circ x$ を満たす

※ 集合が同じでも演算が異なると振る舞いが変わるので集合と演算の組をに対して考える整数は加法（足し算）という演算を考えると群になる

※2この演算は二項演算なので一度に2つの値しか計算することができない。結合法則は、どの２つから計算を始めても結果が同じ値になることを保証する

例）実数の集合で考えてみる

まず、どんな演算を考えるかに注意する

実数の集合には足し算（引き算）と掛け算（割り算）が考えられるのだった

条件１）結合法則を満たすか？

足し算：$1+(2+3)=(1+2)+3$ ……OK

掛け算：$1\times(2\times3)=(1\times2)\times3$ ……OK

二項演算を考えるので、一度に計算できるのは2つの数だけ。結合法則によって（同じ演算なら）計算の順番を気にしなくて良いことが言えるようになる

例）実数の集合で考えてみる

条件2）単位元があるか？

xを任意の実数とする

足し算：$0+x = x+0 = x$　　……0が足し算の単位元

掛け算：$1 \times x = x \times 1 = x$　……1が掛け算の単位元

考える演算によって、同じ集合でも単位元になるものが異なる

例）実数の集合で考えてみる

条件3）逆元があるか？

xを任意の実数とする

足し算：(-x)+x = x+(-x) = 0(加法の単位元)…… -xがxの足し算における逆元

掛け算：xが0でないときは

(1/x) × x = x × (1/x) = 1(乗法の単位元)… 1/xが掛け算における逆元

掛け算を考えると0の逆元を実数の範囲で取ることが出来ないので、実数と掛け算の組み合わせでは群にならない。同じ集合でも考える演算が違うと群になるかどうかが変わる。

（引き算、割り算はそれぞれ足し算、掛け算の逆元という位置づけになる。）

例）実数の集合で考えてみる

条件4）演算は可換か？

a, bを任意の実数とする

足し算は$a+b = b+a$ を満たすので、実数は加法によって可換な群（アーベル群）となる

加法について群になるものを加群と呼ぶ（今回の講演のテーマ）

環（かん）

$(X, \circ)$は代数系とする。二項演算として加法+と乗法×が定義され、以下を満たすとき環という※

1. 加法について：可換な群

    任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x + (y + z) = (x + y) + z$ が成り立つ

2. 乗法について：半群（前のページで結合法則のみを満たすもの）

3. 分配法則を満たす

    任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

    $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

4. 更に乗法が可換であるとき、可換環という

5. 乗法の単位元$(\neq 0)$が存在するとき、単位的環という

整数は演算として加法（足し算）と乗法（掛け算）を考えると環になる

例）整数の集合で考えてみる

環には2つの演算足し算（引き算）と掛け算（割り算）を考える

条件１）加法について群になる

足し算の結合則：$1+(2+3)=(1+2)+3$ ……OK

足し算の単位元：$0+x = x+0 = x$ ……OK

足し算の逆元　：$(-x)+x = x+(-x) = 0$ ……OK

例）整数の集合で考えてみる

条件2）乗法について半群（結合法則だけ満たす）

x, y, zを任意の整数とする

$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

条件3）分配法則を満たす　　例）$2 \times (3+4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$

条件4）掛け算の順序は可換　例）$2 \times 3 = 3 \times 2$

条件5）1は整数に含まれ、乗法の単位元

元々、整数や有理数などに共通する構造を見出そうとして生み出されたのが代数

例）整数係数の多項式も環になる

整数係数の多項式の例

$x^2,\ 3x^3 + x + 1,\ 100x^{100},\ \ldots$

一般化して書くと

$$a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots + a_{m+1}x^0 = \sum_{i=1}^{m} a_{i+1}x^i,\ (a_i \in \mathbb{Z},\ a_1 \neq 0,\ i = 1, \cdots, m)$$

こんな風に書けるような多項式の全体の集合を考える

例）整数係数の多項式も環になる

整数係数の多項式の加法

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i+1}x^i\right) + \left(\sum_{j=0}^{m'} b_{j+1}x^j\right) = \left(\sum_{i=0}^{Max(m,\, m')} (a_{i+1} + b_{i+1})x^i\right)$$

例）$(x^2 + 2x + 1) + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

重要な例）整数係数の多項式も環になる

整数係数の多項式の乗法

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i+1}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m'} b_{j+1}x^j\right) = \left(\sum_{i+j=0}^{m+m'} (a_{i+1}b_{j+1})x^{i+j}\right)$$

例）$(x+1)(x^2+2x+1) = x^3+3x^2+3x+1$

1も整数係数の多項式とみなせる。これが整数係数の多項式環の単位元になる

体（たい）

$(X, \circ)$は代数系とする。二項演算として加法$+$と乗法$\times$が定義され、以下を満たすとき体という

1. 単位的環であり、0以外の元に乗法の逆元が存在する
2. 分配法則が成立する
3. 乗法が可換である

これ以降、体をKと表す

Kとしては実数$\mathbb{R}$・複素数・有限体などが考えられるが、~~今回扱う具体例は$\mathbb{R}$に限る※~~

~~※このセミナーでは体の標数は0とし、それ以外の場合の議論はここでは扱わない~~

ここまでのまとめ

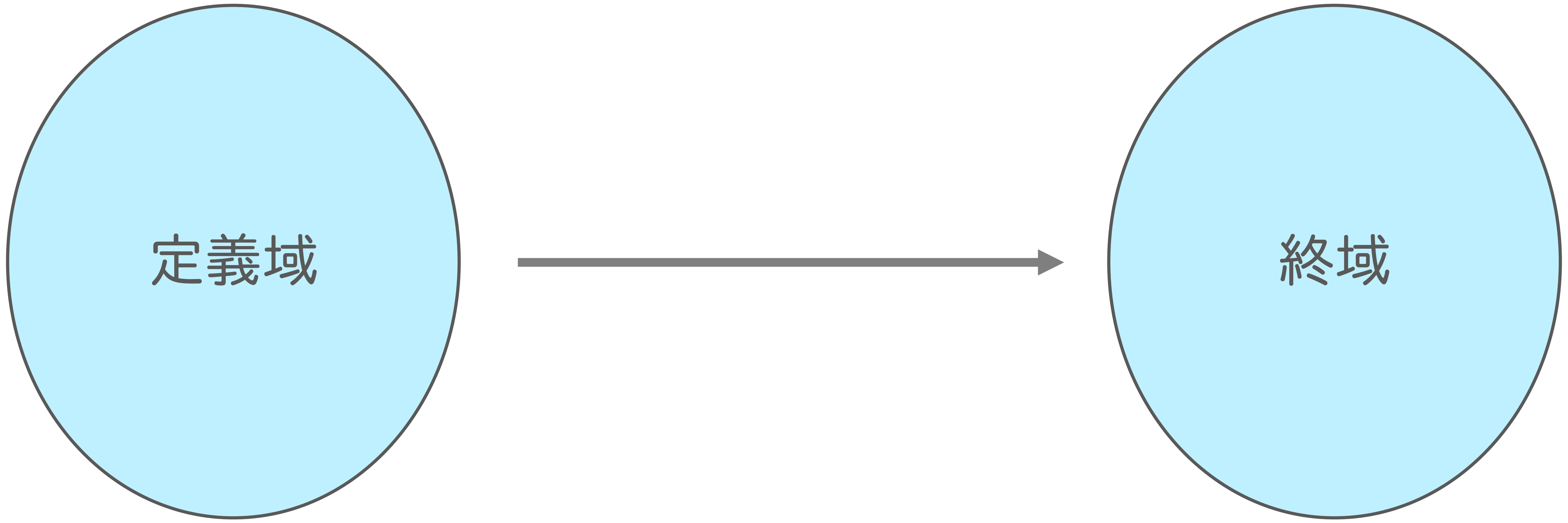
- ものの集まり（集合）を考える
- 集合と演算の組み合わせを考える
  - 群：（実数と＋）で加法群など
  - 環：（整数と＋, ×），（整数係数の多項式全体と＋, ×）など
  - 体：（実数と＋, ×），（複素数と＋, ×）など

このあとのはなし

- 集合と集合の間のつながり（写像）を考える
  - 高校で扱った「関数」も写像の一種
  - 良い性質を持つ写像：準同型
  - 微分も準同型写像と思うことができる

写像

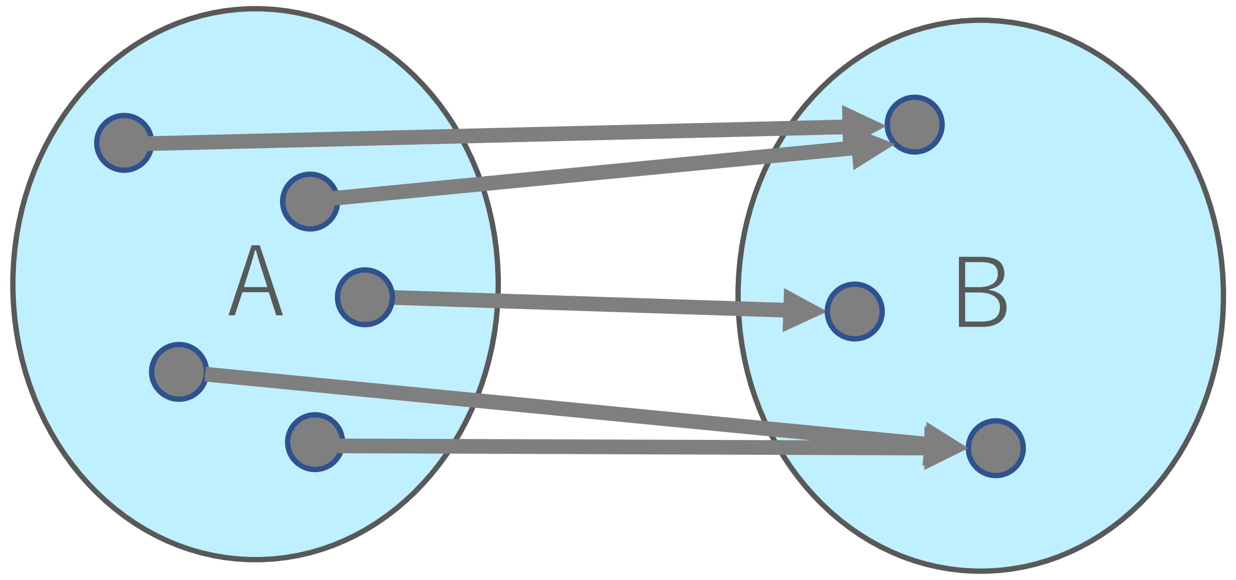
二つの集合が与えられたときに、一方の集合（定義域）の各元に対し、他方の集合（終域）のただひとつの元を指定して結びつける対応のこと



終域のすべての元が定義域の元と対応付けられているわけではない
定義域の元と対応付けられている元からなる集合を像という

全射と単射

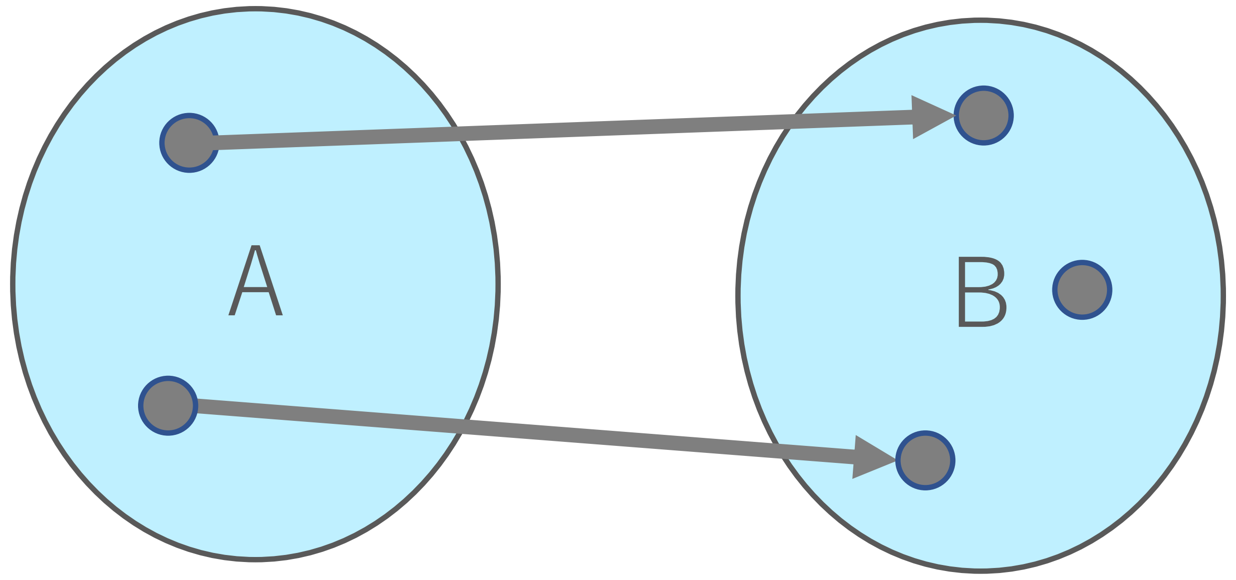
- 全射



終域の全ての元に、対応する定義域の元がある

$\forall y \in B$に対し、$f(x)=y$となる$x \in A$が存在する

- 単射



Aの元とBの元が１：１に対応している

$\forall x, y \in A$に対し、$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

Aと対応付けられないBの元があることもあるが
Bの全ての元がAと対応付けられるときはその写像は
全射かつ単射で、全単射と呼ばれる

準同型写像

2つの集合X, X’の間の写像であって、それらの代数的な構造を保つものを準同型写像という

- 群の準同型：　$f(a \circ_X b) = f(a) \circ_{X'} f(b)$
- 環の準同型：　$f(a +_X b) = f(a) +_{X'} f(b),\ f(a \times_X b) = f(a) \times_{X'} f(b)$

K-準同型写像とK-線形写像

- 2つの集合 X, X’　の写像であって、それらの（代数的な）構造を保つものを準同型写像という

- X, X’　がK-線形空間で以下のように線形性(和とスカラー倍)を保つものをK-線形写像という※

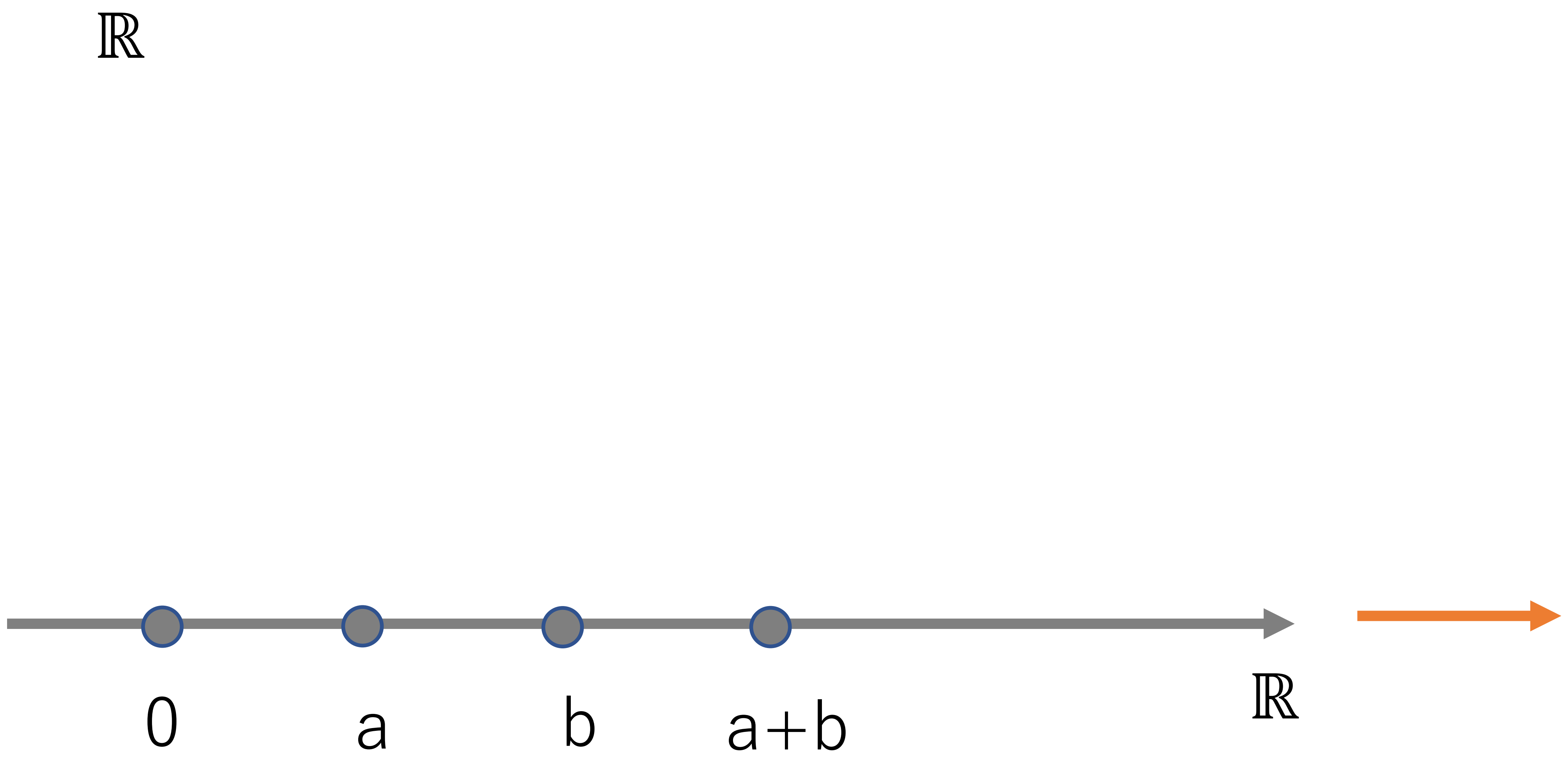
  $a, b \in V, \lambda \in K$として

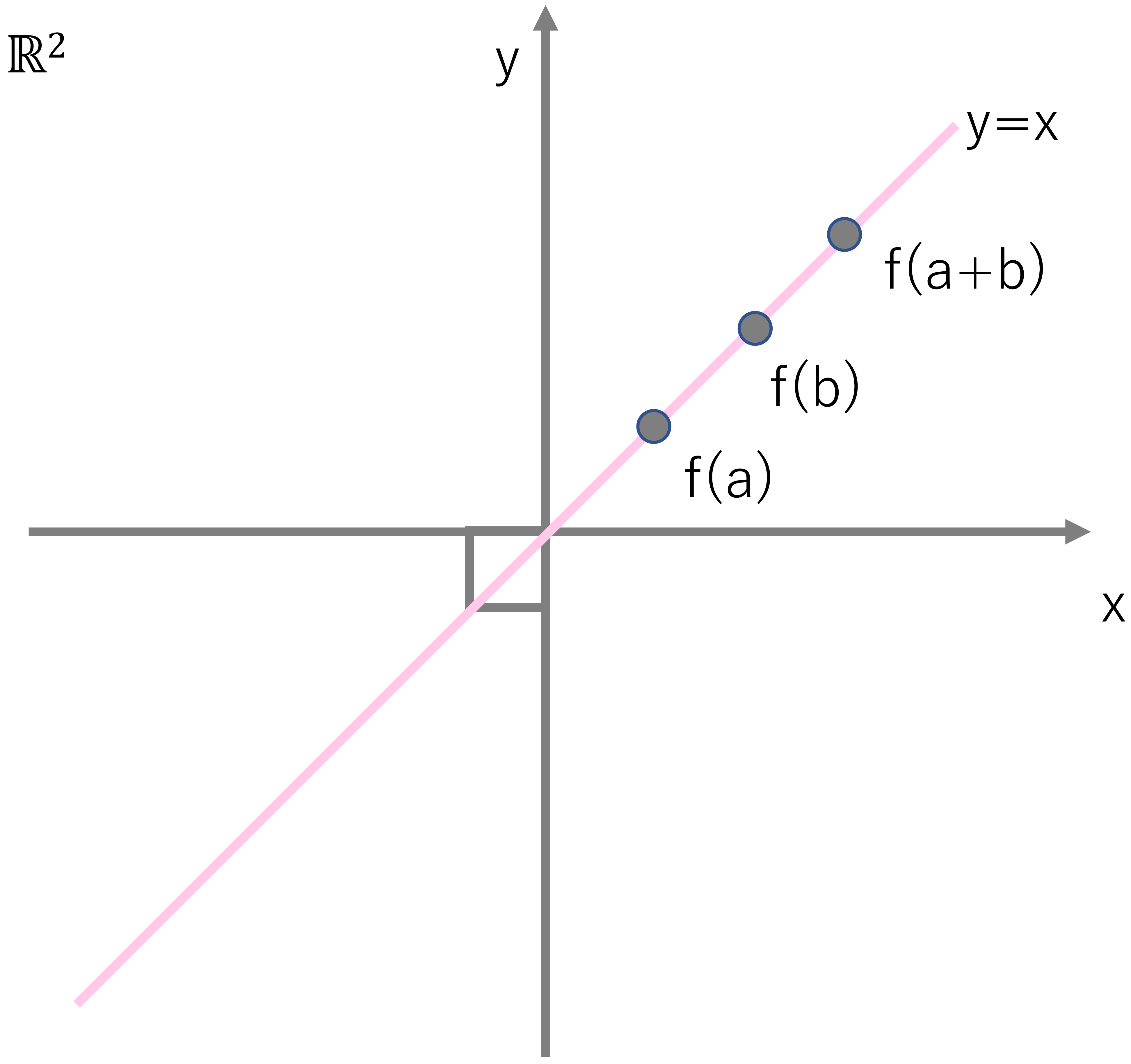
  $$f(a+b) = f(a)+f(b)$$

  $$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

※ 線形空間の間の準同型写像であることが文脈から明らかなときにはK-準同型写像と書いてK-線形写像を表すこともある

K-線形写像の例





$$
\begin{array}{cccc}
f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}
\end{array}
$$

微分とは？

変化の割合を知るためのもの

グラフ上では接線の傾きを求めるのが微分

物理では、位置から速さ、

速さから加速度を求める操作にあたる

グラフはWolframAlphaのページで簡単に描画出来ます！

質問を入れるといい感じに答えてくれます。おすすめ

https://ja.wolframalpha.com/

整数係数の多項式の微分の公式

$(x^n)'$　という記号は x^n を x で微分したものと表すとする

$(x^n)' = nx^{n-1}$ とする

$(ax^n)' = a(x^n)' = anx^{n-1}$ とする（aは整数）

$(ax^n + bx^m)' = (ax^n)' + (bx^m)' = anx^{n-1} + bmx^{m-1}$ とする

（a, b整数, n と m は0以上の整数）

微分の性質とは?

Rを可換環(ひとまず多項式環を考えればよい)とする。$d : R \to R$が以下を満たすときRにおける微分という

1. dは加群の準同型、すなわち任意の$a, b \in R$に対して

   $d(a+b) = d(a) + d(b)$

2. 任意の$a, b \in R$に対して

   $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ (ライプニッツ則)

   が成り立つ

整数係数の多項式環から元を2つ取る

例えば、$(x^2+1), (x+1)$

上の多項式の微分について1を満たすか?

$\left((x^2+1)+(x+1)\right)' = \left(x^2+x+1\right)' = 2x+1$

一方、$(x^2+1)' + (x+1)' = 2x+1$

となり1を満たす

2を満たすか?

$\left((x^2+1)(x+1)\right)' = \left(x^3+x^2+x+1\right)'$

$= 3x^2+2x+1$

一方、$(x^2+1)'(x+1) + (x^2+1)(x+1)'$

$= 2x(x+1) + (x^2+1) = 3x^2+2x+1$となり 2 を満たす

微分方程式と代数

ところで $u'' + au' + bu = 0$, (a, bは定数、u は t を独立変数とする未知函数)

なる微分方程式を考える。ただし、$u' = \dfrac{du}{dt}, u'' = \dfrac{d^2u}{dt^2}$

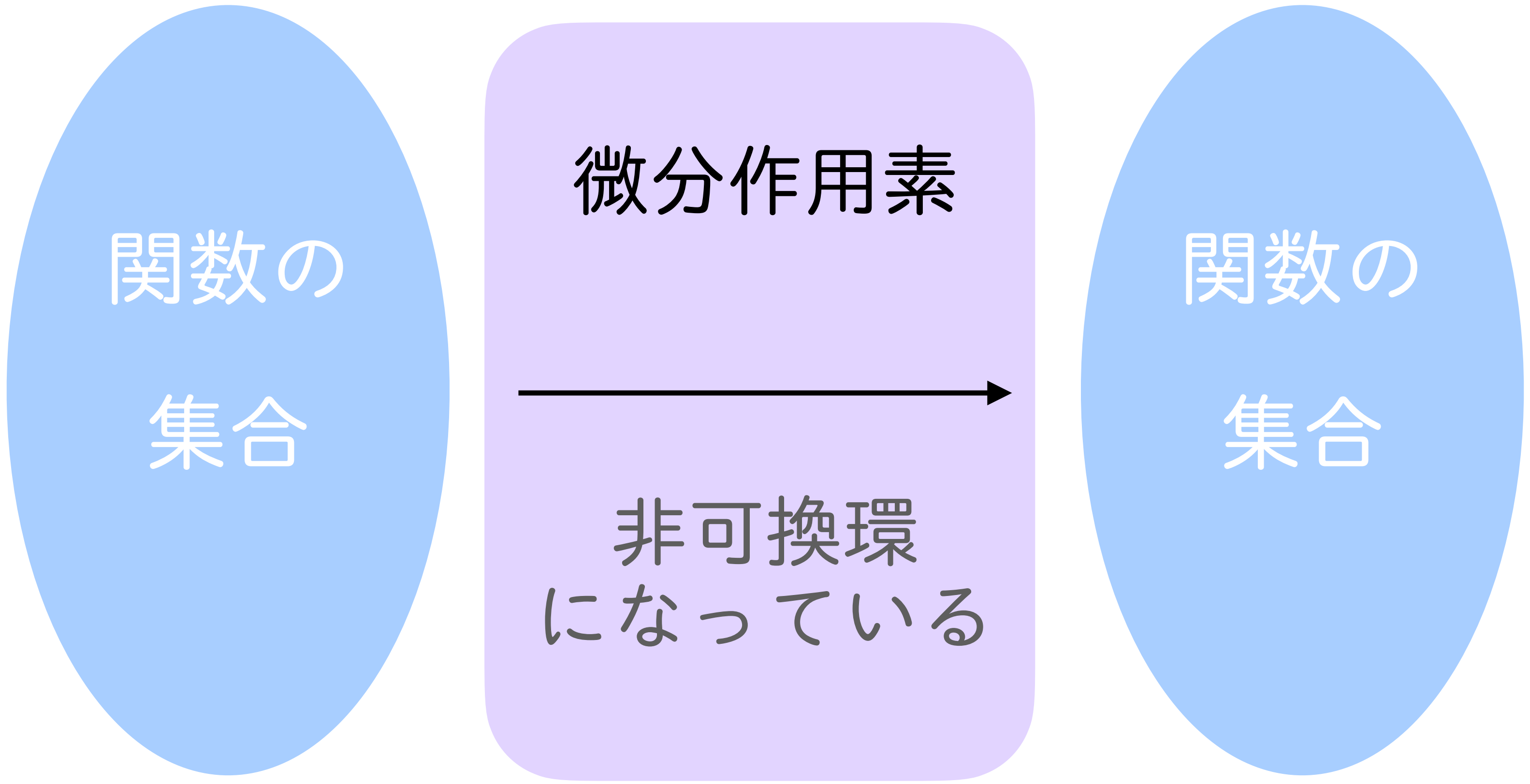
微分する、という操作 $\dfrac{d}{dt}$ を作用素と考えて、$\partial = \dfrac{d}{dt}$ とおくと上の微分方程式は

$\partial^2 u + a\partial u + bu = (\partial^2 + a\partial + b)u = 0$ と書ける。更に形式的に ∂ の二次式とみて

$(\partial - \alpha)(\partial - \beta)u = 0$ と思える。$(\partial - \alpha)u = 0, (\partial - \beta)u = 0$ の解は共に上の微分方程式の解になる。

微分作用素環

- 前のスライドで挙げたような作用素を微分作用素のなす非可換な環に属しているとみる



関数から関数への写像が全て微分作用素になるのではなく、微分の性質1, 2を満たす必要がある。→このような制約を入れて、非可換な環を作る

まとめ

- ものの集まり（集合）に様々な構造を入れると多様な理論が生まれる
  - 群・環・体
- 集合と集合の間の写像のうち定義域の構造を保つものを準同型写像という
  - 微分という操作も（環を加群と見て）加群の準同型写像と捉えられる
- 写像の集まり自体を集合と思うと、（性質の良いものは）代数的な構造を考えることができる
  - D加群（微分作用素のなす非可換な環）

次回

- 完全列
    - 写像をいくつか連ねたものの中で、よい繋がり方をしたものを考える
- 複素関数
    - 関数を考える時に定義域・終域を複素数とするといいことがある

参考文献

- 加群十話（堀田良之）
- 線型代数学（佐武一郎）
- D加群超入門（池祐一）https://mathlog.info/articles/610
- 微分加群！～その定義と応用～（ラスクさん）
  https://mathforeveryone.hatenablog.com/entry/2019/12/17/070000