# 第33回数学カフェ予習会 #2

～射影空間の定義から～

Feb/27/2021

# 本日の内容

- 前回の復習
  - 線形空間
  - 射影空間
- 立体射影
- 二次形式
- 二次超曲面
- 射影代数的多様体
- 射影空間の有理関数
- 射影空間の有理写像

カメラと代数幾何学の講演の予備知識として
必要なことに絞りざっくりとお話します

※このセミナーでは体Kの標数は0で、
主に$\mathbb{R}, \mathbb{C}$を考えるとします

# 前回の復習（一言で言うと何？くらいのざっくりした振り返り）

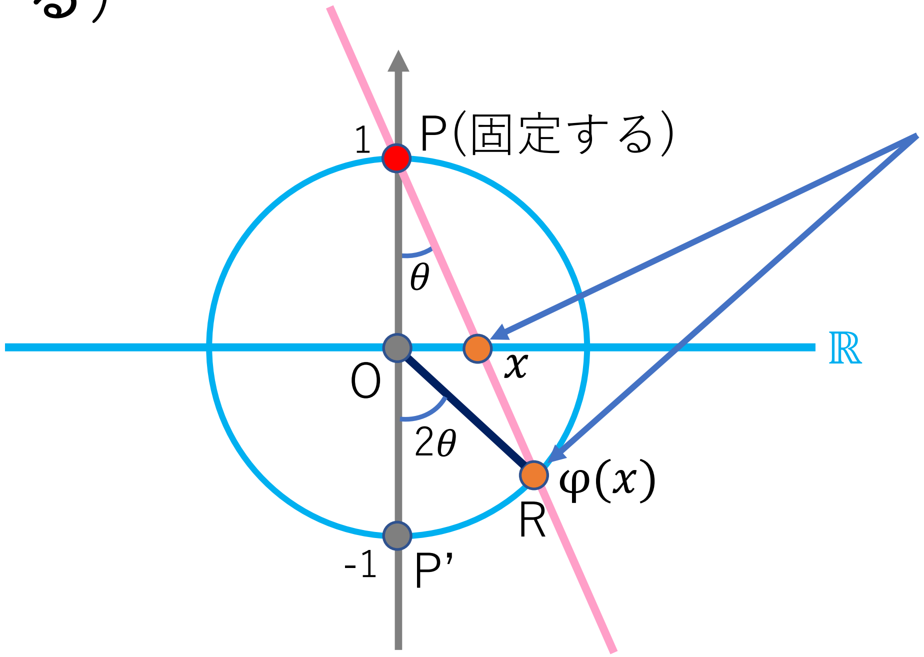
- 線形空間
  - 集合と代数的構造
  - 体
  - 線形空間
  - 準同型写像
- 射影空間
  - 定義
  - 具体例
  - （予習会後の質問より）カメラと射影空間

こちらは第１回の予習会の資料を御覧ください

# 一次元実射影空間と円周（立体射影）

## 例2.3.2（射影空間の幾何学）

$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$※は円周と同相（円周と$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}}$の間には連続な全単射がとれる）




Pを通る直線によって円周上の全ての点の集合と直線ℝに無限遠点を付け加えた集合上の全ての点が1:1に対応付けられている
そして、対応を与える関数は連続

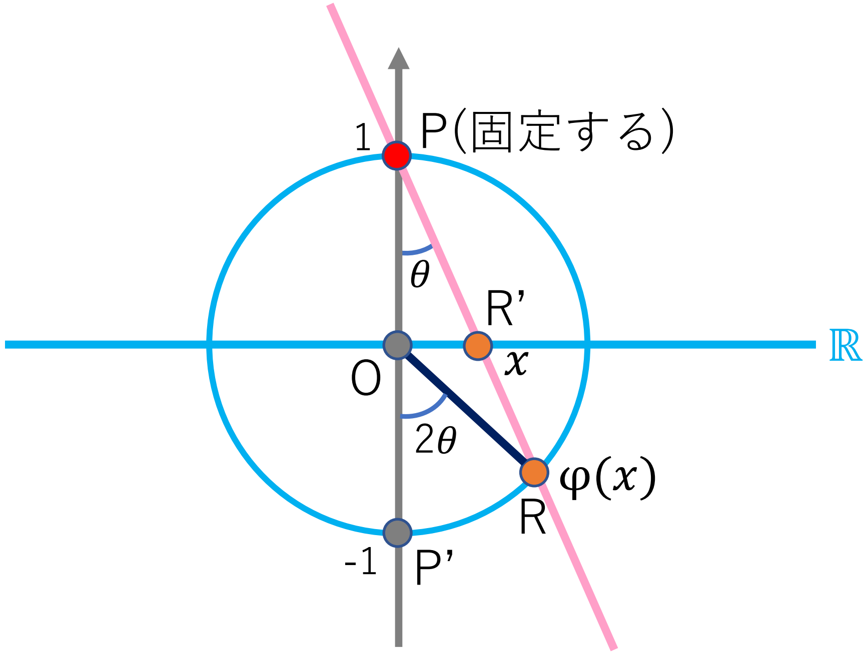
全ての点・・・全射性
1:1 ・・・・・単射性
対応を与える関数が連続・・・連続性

※実数全体の集合に、無限遠点と呼ばれる点を１つ付け加えてできる集合

# 一次元実射影空間と円周（立体射影）

## 例2.3.2（射影空間の幾何学）

$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$は円周と同相（円周と$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}}$の間には連続な全単射がとれる）



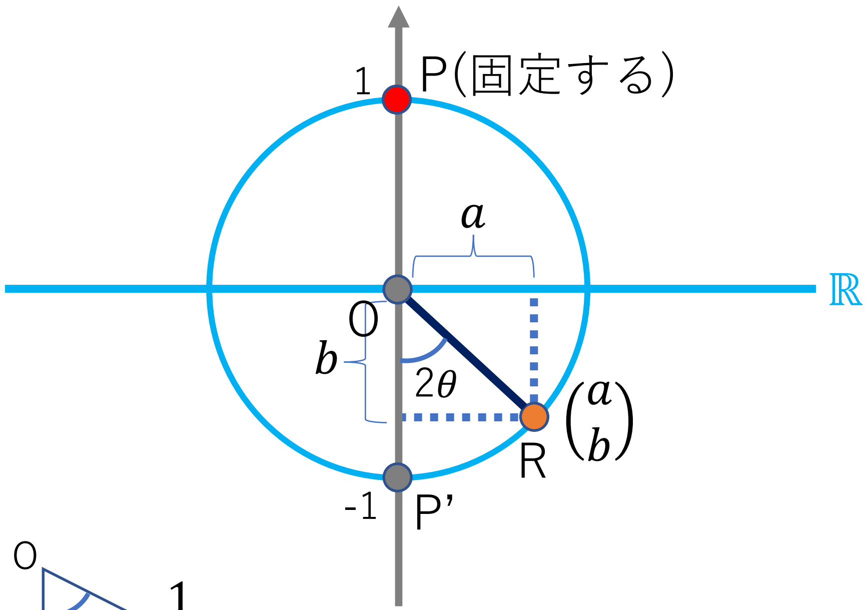

半径１の単位円を考えているが、
半径rとしてもよい（計算が面倒くさくなる）

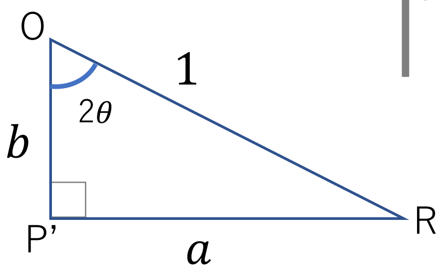
図のように点に名前をつける
このときPとR'を通る直線と単位円のPでない交点Rの座標を$x$の関数で表す

$\angle P'PR = \theta$とする
$\angle P'OR = 2\theta$（三角形ORPは二等辺三角形）
となる。また、OR'の長さ$x$は$\tan\theta\ (= OR'/OP)$と表せる

# 一次元実射影空間と円周（立体射影）

## 例2.3.2（射影空間の幾何学）続き




Rの座標を$\binom{a}{b}$とおくと$(a, b$ は実数$)$で

$$a = \frac{a}{\mathrm{OR}} = \sin\angle\mathrm{P'OR} = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$= \tan\theta\cdot\frac{1}{\tan^2\theta+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$b = \frac{b}{\mathrm{OR}} = -\cos\angle\mathrm{P'OR} = -\cos 2\theta = -(2\cos^2\theta - 1)$$

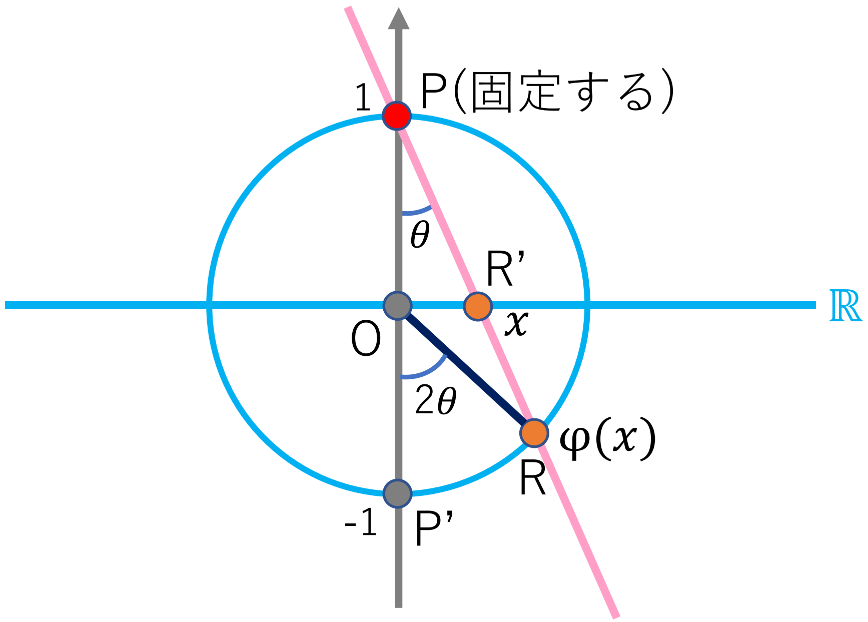
$$= -2\cdot\frac{1}{\tan^2\theta+1} + 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

よって$x\in\mathbb{R}$に対してRの座標は$\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+1}\\ \frac{x^2-1}{x^2+1}\end{pmatrix}$となり座標を表す関数は連続

また、$x\to\pm\infty$とすると$\binom{0}{1}$となり、これは点Pである。

# 一次元実射影空間と円周（立体射影）

## 例2.3.2（射影空間の幾何学）




±∞の点を同一視して無限遠点∞とすれば
$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$の点に対して１つの円周上の点を対応づける
連続な※写像が作れることがわかった

この写像が全単射であることを示すには次の２つを確認すれ
ばよい（今回の目的に対し脇道にそれすぎるので割愛した）

・円周上の任意の点に対し対応する$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$の点が取れること
・円周上の点を１つ取ったときに、対応する$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$の点は唯１つに定まること

セミナーでは左図から直感的な説明を行った

# 二次形式

定義（二次形式）
$V$をK上の線形空間とする
Q：VからKへの写像が

$$Q = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

ただし　$a_{ij} \in K$ , $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$

と書けるときQ を$V$上の二次形式という
（全ての項が二次の多項式）

全ての項がm次の多項式とは
各項に含まれている変数が
重複も含めてすべてm個である式

全ての項が二次の多項式の例

$$x^2 + xy + y^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 + xz + y^2$$

# 二次形式

$$v^t = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると(AはKを成分にもつ行列)

$$\mathrm{Q} = v^t \mathrm{A} v$$

と書ける（右参照）

行列Aが正則、すなわち逆行列を持つときQは非退化という※

左のように書けることの確認

$$\mathrm{Q} = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & +a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \quad x_1\left(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n x_n}\right)$$
$$+ x_2\left(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n x_n}\right)$$
$$\vdots$$
$$+ x_n\left(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn x_n}\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

※行列の計算については口頭で簡単な説明に留めましたが、気になる方はぜひ線形代数のテキスト・問題集等で勉強してみて下さいね。
（Twitterで検索すると沢山のおすすめ書籍情報に出会えます）

# 二次形式の例

2変数

$$x^2+y^2$$

$$x^2-y^2$$

3変数

$$x^2+y^2+z^2$$
$$x^2-y^2+z^2$$
$$x^2+y^2-z^2$$

4変数

$x^2+y^2+z^2+w^2$など

## おまけ（座標変換との関係）

適当な座標の変換によってqは

$$\lambda_1 \mathrm{X}_1{}^2+\cdots+\lambda_n \mathrm{X}_n{}^2$$

と書ける（$\lambda_i$は行列Aの固有値）

また、Kが代数閉体のときは
ある整数 $\mathrm{r}\leq n$ が存在して

$$\mathrm{X}_1{}^2+\cdots+\mathrm{X}_\mathrm{r}{}^2$$

と書ける（非退化のときは$r=n$）

二次形式を考えるときは上のような標準形を考えれば良い

具体例と計算は次回

# 二次超曲面

K：標数2ではない代数的閉体とする

<u>定義（二次超曲面）</u>

V：n+2 K-線型空間
q：V上の0ではない二次形式
とする。このとき、n+1次元の射影空間の部分集合

$$Q=\{[Kv] | q(v)=0\}$$

をn次元の二次超曲面という

これは、$q(v)=0$を満たすような$v$と原点を通る直線の全体になっている

## 具体例

n=1のとき
$V$の元は1+2次元の線形空間の元だから
$q$として3変数の二次形式を考える

$q$：$x^2+y^2-z^2$とすると

$$x^2+y^2-z^2=0$$

を満たす点を$v$とする
原点と$v$を通る直線上の点は全て上を満たし※
この直線の全体からなる集合は1次元の二次超曲面となる

※ $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$を$(x, y, z)$に代入すれば良い

# 二次超曲面

q ：非退化二次形式とするとき
このn次元の二次超曲面は非退化
という

また、

1次元超曲面は二次曲線（円錐曲線）
2次元超曲面は二次曲面

という

前のページの具体例の続き

1次元の二次超曲面の例

3変数の二次形式 $x^2+y^2-z^2$ を考える

$x^2+y^2-z^2$=0に対して、$z \neq 0$のとき
式全体をzで割り、移項すると

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$$

となり $\left(\frac{x}{z}\right), \left(\frac{y}{z}\right)$ を2変数とする単位円になる

これは射影空間$\mathbb{P}^2{}_{\mathbb{R}}$内の円を表している

また、単位円と$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}}$、すなわち$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$は同相であった（立体射影）。このように$\mathbb{P}^2{}_{\mathbb{R}}$（の部分集合）から$\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}}$の間の写像も考えられる（次回詳しくやります）

# 射影代数的多様体

## 定義（ザリスキー閉集合）

$\mathrm{P} = [Kv] \in \mathbb{P}_*(V)$ とｍ次同次多項式 $f$ に対して、

$f(v) = 0$　が成り立つとき $\mathrm{f(P)} = 0$ ※と書き、 P は $f$ の零点であるという

射影空間$\mathbb{P}_*(V)$の部分集合 X は有限個のｍ次同次多項式

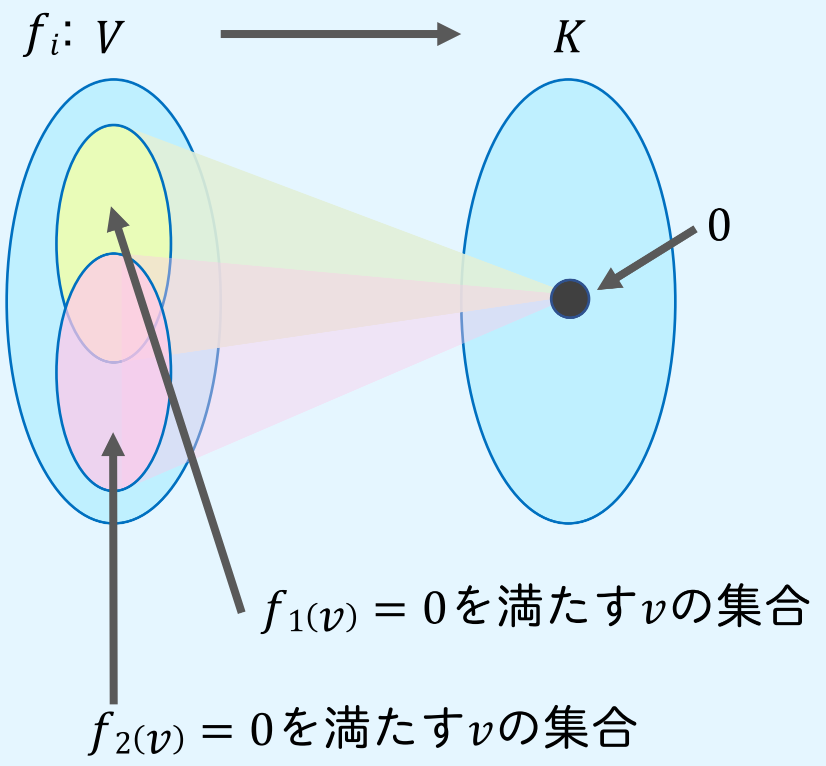
$f_i \quad (i = 1, \cdots, k)$　　が存在してその共通零点

$$X = X(f_1, \cdots, f_k) = \{P \in \mathbb{P}_*(V) | f_1(P) = \cdots = f_k(P) = 0\}$$

を射影空間のザリスキー閉集合とする

※11ページの具体例と同様に、$v$の元を$\lambda$倍して $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$を考えれば $v$と原点を通る直線上の点 $\lambda v$ が $f(\lambda v) = 0$ を満たすことがわかる。これをまとめて$f(\mathrm{P}) = 0$と書く。ただし n は $V$の次元

例）k=2のときXは黄緑とピンクの集合の共通部分に含まれる点を通る直線の全体



# 射影代数的多様体

射影空間のザリスキー閉集合Xは２つのザリスキー閉集合Y, Zが存在して $X \neq Y, Z$ かつ $X = Y \cup Z$ となるとき可約という

可約ではないとき既約であるという
射影空間の既約なザリスキー閉集合を射影的代数多様体という
（今後代数多様体という）

可約の例）
$q = (x^2 + xy + y^2)\,(x^2 + 2xy + y^2)$として
Xは$q(v) = 0$を通る直線の全体とする

$$q_1 = (x^2 + xy + y^2)$$
$$q_2 = (x^2 + 2xy + y^2)$$

として
Yを$q_1(v) = 0$を通る直線の全体
Zを$q_1(v) = 0$を通る直線の全体
とすれば、$X \neq Y, Z$かつ$X = Y \cup Z$

既約の例）
$q$が更に次数の低い同次多項式の積に分解できない
同じ同次多項式$q$でも、係数の体Kを$\mathbb{R}$とするか$\mathbb{C}$とするかで因数分解の可否や零点を持つかが変わる
（次回具体例を扱います）

# 射影空間の有理関数

射影空間X=$\mathbb{P}_*(V)$において、同じ次数k次の同次式$f_1, f_2$の比

$f = f_1/f_2$ をX上の有理関数と呼ぶ

ここで$f_1, f_2$は共通する既約因子（係数をKとする多項式の積に分解したときの因子）を含まないと仮定したとき、超曲面 $X(f_1), X(f_2)$ をそれぞれ$f$の零点集合、極集合という

また、$X(f_1, f_2)$ 上では$f$は　$0 \div 0$ の形になるので、

これを$f$の不確定特異点集合と呼ぶ

# 射影空間の有理写像

同次座標系 $\{x_0, \ldots, x_n\}$　を持つ

射影空間X＝ $\mathbb{P}^n$から

同次座標系 $\{y_0, \ldots, y_m\}$　を持つ

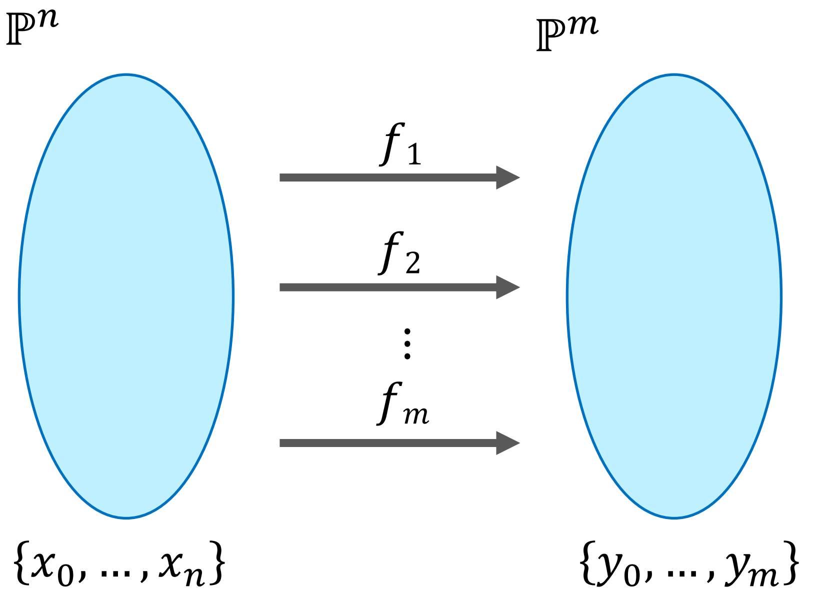
射影空間Y＝ $\mathbb{P}^m$への有理写像$f$とは

同じk次のm+1個の同次式 $f_0, \cdots, f_m$によって

$$f : [x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [y_0 : \cdots : y_m]$$
$$= [f_0(x_0, \cdots, x_n) : \cdots : f_{\mathrm{m}}(x_0, \cdots, x_n)]$$

という形に表される写像。ここで $f_0, \cdots, f_m$は

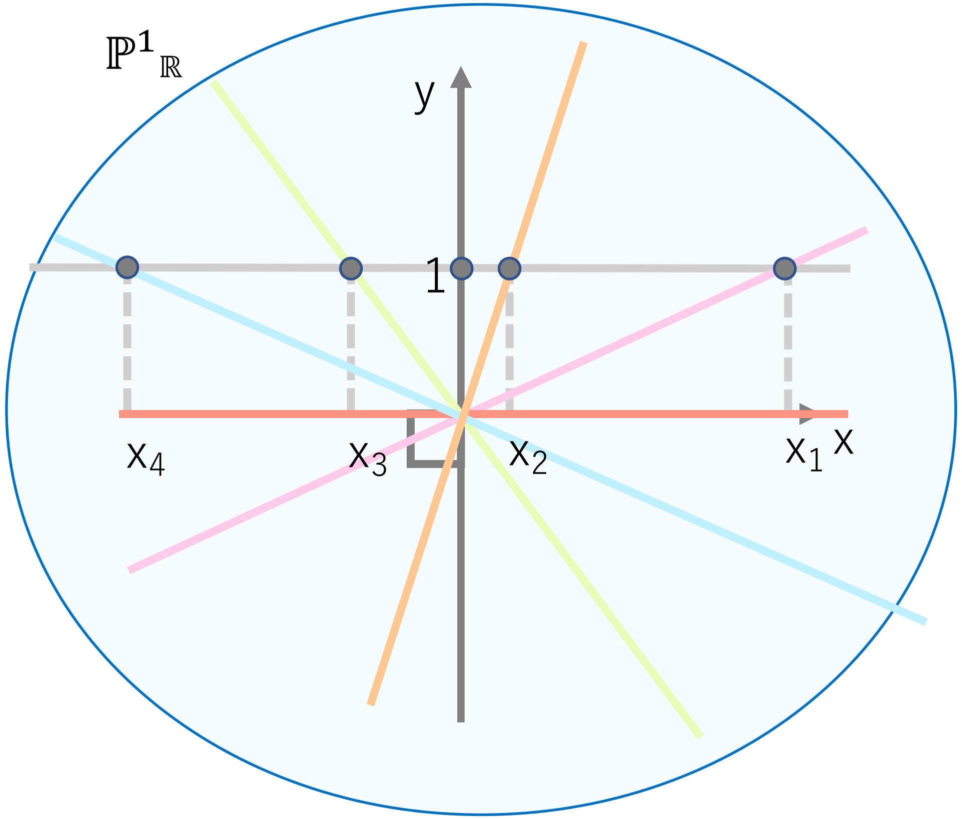
共通する既約因子を持たないとする




$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [y_0 : \cdots : y_m]$$
$$= [f_0(\underline{x_0, \cdots, x_n}) : \cdots : f_{\mathrm{m}}(\underline{x_0, \cdots, x_n})]$$

$\mathbb{P}^n$の点が入る

# 射影空間の有理関数・有理写像の例




$f_1: x^2 + 2xy + y^2$ → $[x^2 + 2xy + y^2 : x^2 - y^2] \in \mathbb{P}^1{}_{\mathbb{R}}$

$f_2: x^2 - y^2$ →

$f_3: x^2 + y^2$ → $[x^2 + 2xy + y^2 : x^2 - y^2 : x^2 - y^2] \in \mathbb{P}^2{}_{\mathbb{R}}$

# 次回は3月6日17時から19時

具体例の計算を通じて、これまでに取り上げた概念に親しみ
射影空間を考えるモチベーションを考えます

お申し込みページ
https://33-prep-3.peatix.com/

# 参考文献


- 射影空間の幾何学（川又）
- 線型代数学（佐武）
- 複素幾何（小林）
- 微分形式の幾何学（森田）
- 多様体の基礎（松本）
- 詳解演習線形代数（水田）