平面ベクトルは聞いたことあるよ～
という方に向けて構成してみました

第33回数学カフェ予習会 #1

～線形代数の基礎から射影空間の定義まで～

Feb/20/2021

本日の内容

- 集合と代数的構造
  - 集合と代数的構造
  - 群・環・体
- 線形空間
  - 直交座標（デカルト座標）
  - 定義
  - 線型部分空間
  - 準同型写像
- 射影空間
  - 定義
  - 具体例

射影空間の定義をしるのに必要なことに絞り
ざっくりとお話します

※このほかにも面白い話が沢山あるよ！

集合と代数的構造

- 集合と代数的構造
- 群・環・体

集合と代数的構造

集合とは、ものの集まり
あるものがその集合に入るかどうか必ず決まるもの

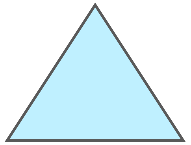
例）
2020年の中で暖かい日……………………………集合ではない
2020年の中で東京都の最高気温が25度以上の日…集合
暖かさは人によって異なるため、基準があいまい。

集合Xに含まれるもの x を元または要素という。$x \in X$などと書く

集合とその構造

集合の要素同士に様々な関係性（構造と呼ぶ）を入れると、その関係性に特有の性質が現れる

要素のラベルではなく構造に注目して一般化できる

1, 2, 3 ↔  ↔ 文字列あいう

代数的構造とは、集合の上に定まる演算によって生まれる要素同士の関係性のこと

様々な数の集合と代数的構造

- 整数　：＋，－，×
- 有理数：＋，－，×，÷
- 実数　：＋，－，×，÷
- 複素数：＋，－，×，÷
- 有限体：＋，－，×，÷

$1 \div 2 = 1/2$ は整数に含まれない

実数の集合を $\mathbb{R}$ と書くとする

例）集合の要素の数が有限個で
$\{1, p, p^2, \cdots, p^{n-1}\}, p^n=1$

集合 X に(二項※)演算 ∘ が定められていて、その演算の結果も Xに含まれるとする。このとき(X, ∘)は代数系であるという。このセミナーでは、演算とは二項演算を指すものとする

※二項演算とは、2つの値を入れて、1つの値を返す計算の規則のことをさす

群（ぐん）

代数系$(X, \circ)$が以下を満たすとき群という※

1. その演算に対して結合法則が成り立つ※2

　　任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ が成り立つ

2. 単位元が存在する

　　任意の $x \in X$ に対し、$e \circ x = x \circ e$ となる共通の元 $e \in X$ が存在する

3. 逆元が存在する

　　任意の $x \in X$ に対し、$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1}$ となる元 $x^{-1} \in X$ が存在する

4. さらに演算が可換であるとき、可換群（またはアーベル群）という

　　任意の $x,y \in X$ に対し、$x \circ y = y \circ x$　を満たす

※ 集合が同じでも演算が異なると振る舞いが変わるので集合と演算の組をに対して考える整数は加法（足し算）という演算を考えると群になる

※2この演算は二項演算なので一度に2つの値しか計算することができない。結合法則は、どの２つから計算を始めても結果が同じ値になることを保証する

環（かん）

$(X, \circ)$は代数系とする。二項演算として加法+と乗法×が定義され、以下を満たすとき環という※

1. 加法について：可換な群

   任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x + (y + z) = (x + y) + z$ が成り立つ

2. 乗法について：半群（前のページで結合法則のみを満たすもの）

3. 分配法則を満たす

   任意の $x, y, z \in X$ に対し、$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

   $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

4. 更に乗法が可換であるとき、可換環という

5. 乗法の単位元($\neq 0$)が存在するとき、単位的環という

整数は演算として加法（足し算）と乗法（掛け算）を考えると環になる

体（たい）

$(X, \circ)$は代数系とする。二項演算として加法$+$と乗法$\times$が定義され、以下を満たすとき体という

1. 単位的環であり、0以外の元に乗法の逆元が存在する
2. 分配法則が成立する
3. 乗法が可換である

これ以降、体をKと表す

Kとしては実数$\mathbb{R}$・複素数・有限体などが考えられるが、今回扱う具体例は$\mathbb{R}$に限る※

※このセミナーでは体の標数は0とし、それ以外の場合の議論はここでは扱わない

$\mathbb{R}$は加法(+)と乗法(・)で体になる

x, y, z ∈ $\mathbb{R}$とする

($\mathbb{R}$, +)

- 結合則 …… x+(y+z)=(x+y)+z
- 単位元 …… 0+x = x+0 = x
- 逆元 ……… (-x)+x = x+(-x) =0
- 可換 ……… x+y=y+x

($\mathbb{R}$, ・)

- 結合則 …… x・(y・z)=(x・y)・z
- 単位元 …… 1・x = x・1 = x
- 逆元 ……… (1/x)・x=x・(1/x)=1
  - (ただし x は0でない)
- 可換 ……… x・y=y・x

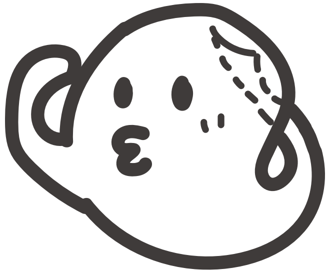
分配法則は略

※見やすさを高めるため掛け算を・と書いた

線形空間

- 直交座標（デカルト座標）
- 線形空間の定義
- 線形部分空間
- 準同型写像

まずは直交座標をざっくり復習し
平面をつかって線形空間の概要を掴みます

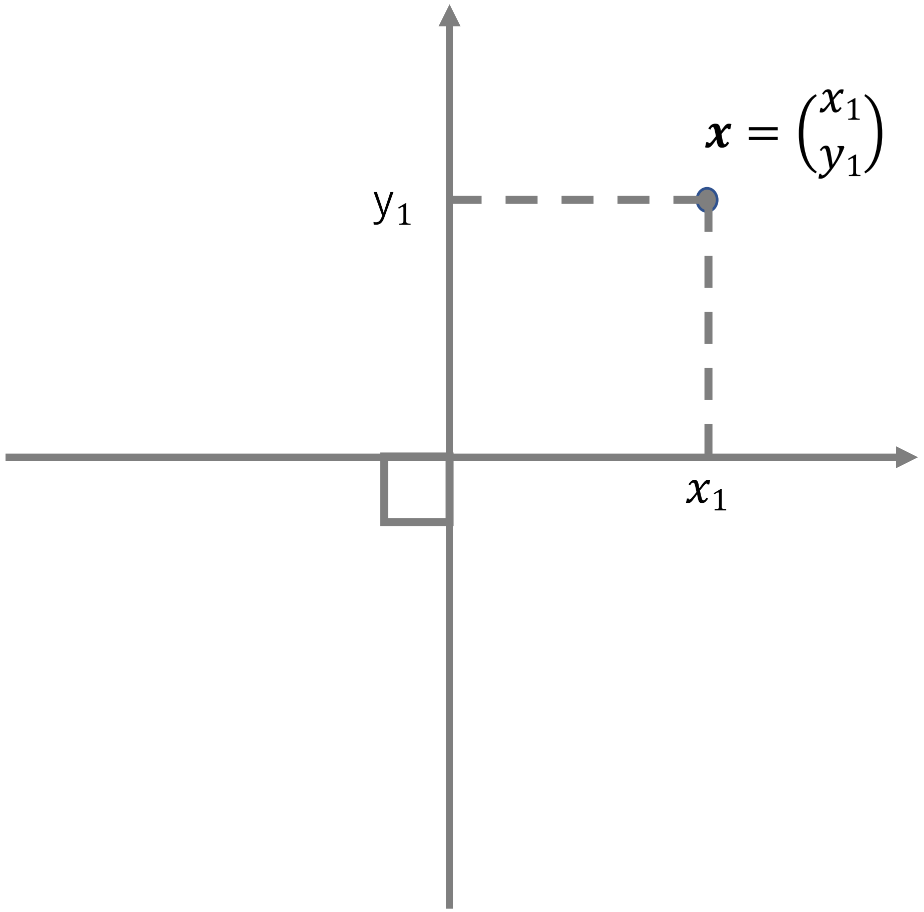


直交座標（デカルト座標）

ルネ・デカルト(1596年 - 1650年)

平面上に直交する2つの座標軸を引き
2つの実数の組で平面上の位置を表す
方法を考案した

以降、平面を2つの実数の組$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$と
みなして$\mathbb{R}^2$と書くとする



K上の線形空間の定義

V を空ではない集合とする

任意の $x, y \in V$ と $k \in K$ に対して

和 $x + y$ とスカラー倍 kx が定義されていて

V は0(加法の単位元)を含み

各 $x \in V$ に対して逆元が存在する

そして、任意の $x, y, z \in V$ とスカラー k, l に対して

右の8条件を満たすとき、VをK上の線形空間という

（K-線形空間と呼ぶとする）

(1) 和の結合法則:
$(x + y) + z = x + (y + z)$

(2) 和の交換法則:
$x + y = y + x$

(3) 零ベクトルとの和:
$x + 0 = x$

(4) 逆ベクトルとの和:
$x + (-x) = 0$

(5) スカラー倍の結合法則:
$(kl)x = k(lx)$

(6) スカラー 1 ※によるスカラー倍:
$1x = x$

(7) ベクトルの和に関する分配法則:
$k(x + y) = kx + ky$

(8) スカラー倍に関する分配法則:
$(k + l)x = kx + lx$

※Kは体なので、体の定義より乗法の単位元である1を含んでいる

平面($\mathbb{R}^2$)が$\mathbb{R}$-線形空間になることの確認

$a, b \in \mathbb{R}^2$ と$k \in \mathbb{R}$とする。ただし　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で各成分実数。

和：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$　　スカラー倍：$k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$

と定義して(1)-(8)が成り立つことを示し、セミナーでは
平面ベクトルで(1)-(8)がどのような意味を持つのか確認しました

（図を描くのに少しお時間ください。）

K-線形空間 V の基底と次元

- 一次独立

  以下を満たすとき、$v_1,\cdots,v_r \in V$ は一次独立であるという

  $a_1,\cdots,a_r \in K$ として、$a_1v_1+\cdots+a_rv_r=0$ ならば $a_i=0\ (i=1,\cdots,r)$

- Vに含まれる一次独立なベクトルの最大の個数をVの次元という

- 一次独立なベクトルの組でVの次元と個数が等しいものをVの基底という
- Vの任意の元は基底の一次結合で書ける（基底の元のスカラー倍とその和で表せる）

$\mathbb{R}^2$の場合

- 基底の例

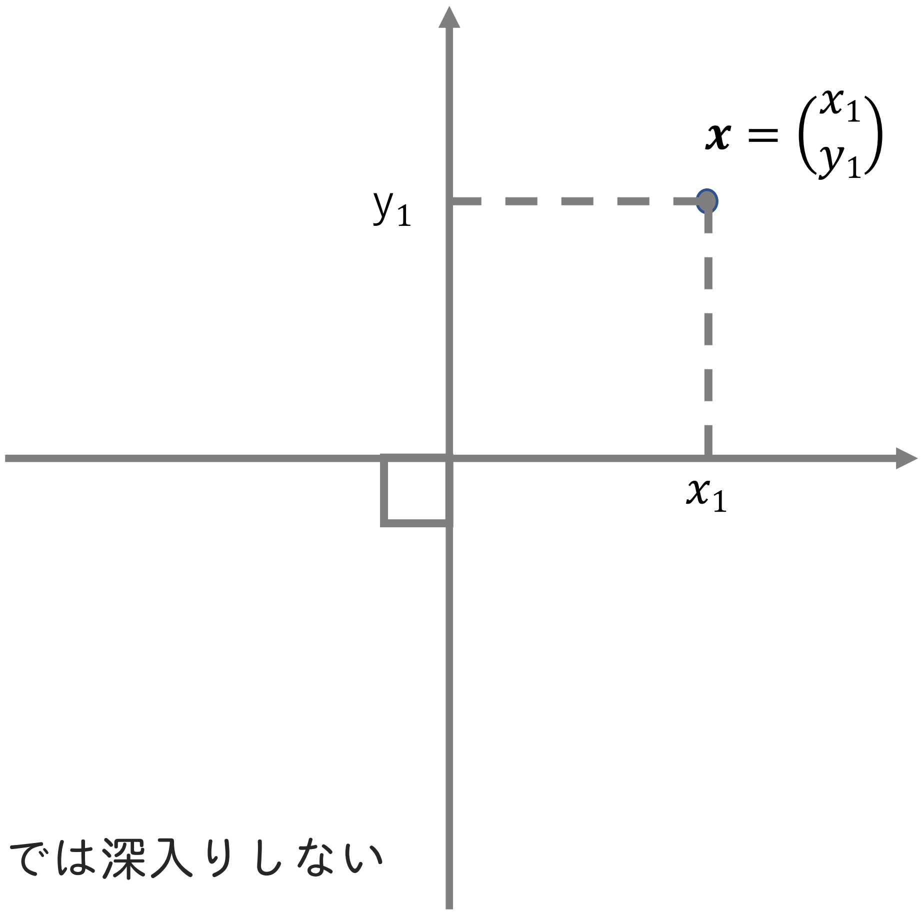
$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とすれば、基底になる※

任意の$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と書ける



※これ以外にも様々な基底のとり方がありうるが、ここでは深入りしない

線形部分空間

K上の線形空間Vの部分集合※WがVの部分空間であるとは
次の3つを全て満たすことである

・Wは空集合でない

・$a, b \in W$ ならば $a+b \in W$

・$a \in W, \lambda \in K$ ならば $\lambda a \in W$

※集合Aが集合Bの部分集合であるとは、Aの任意の元がBの元であることを指す

$\mathbb{R}^2$の線形部分空間

部分空間に含まれる一次独立な元の組の最大の個数で場合分けすると、0, 1, 2個のいずれかに分けられるが

0個の場合…$\{\mathbf{0}\}$（原点のみからなる集合）
1個の場合… 原点を通る直線※2

2個の場合… $\mathbb{R}^2$自身

となる。

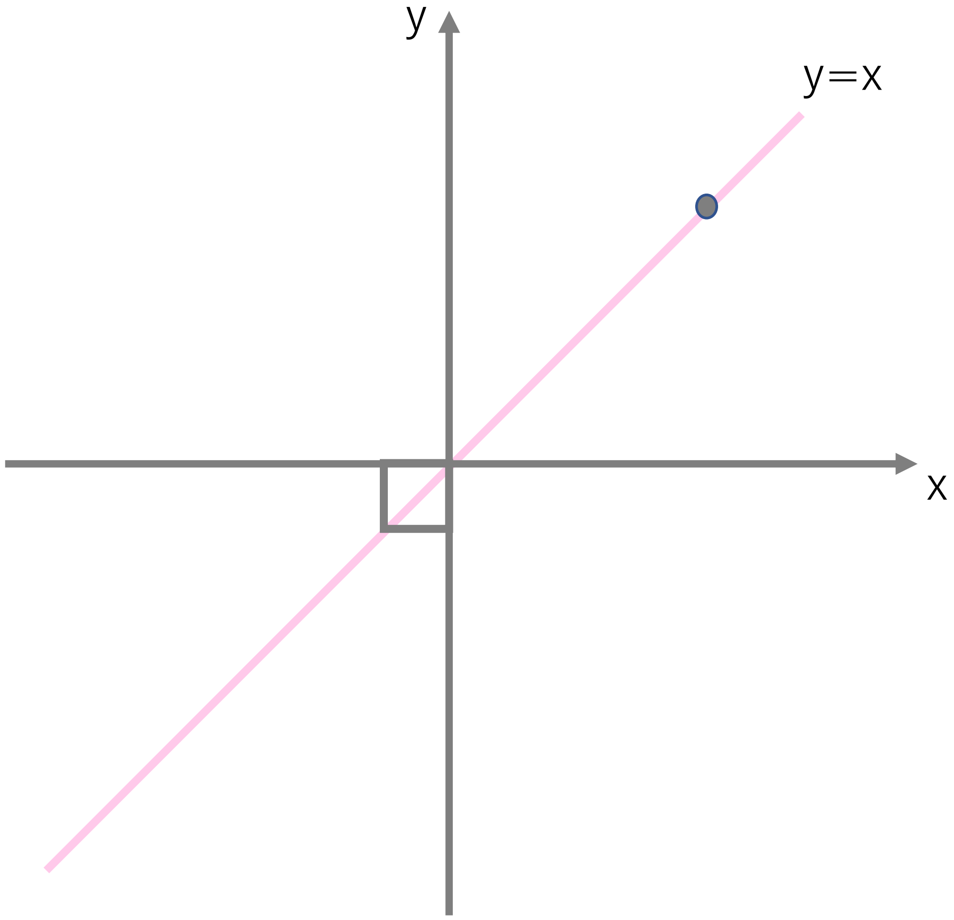
※2　原点を通る任意の直線は線形部分空間になるがここでは証明は省略し
セミナー中では y=x の場合のみを示した。

$\mathbb{R}^2$の線形部分空間の例

第1成分と第2成分が等しい点の集合W
は$\mathbb{R}^2$の線形部分空間で

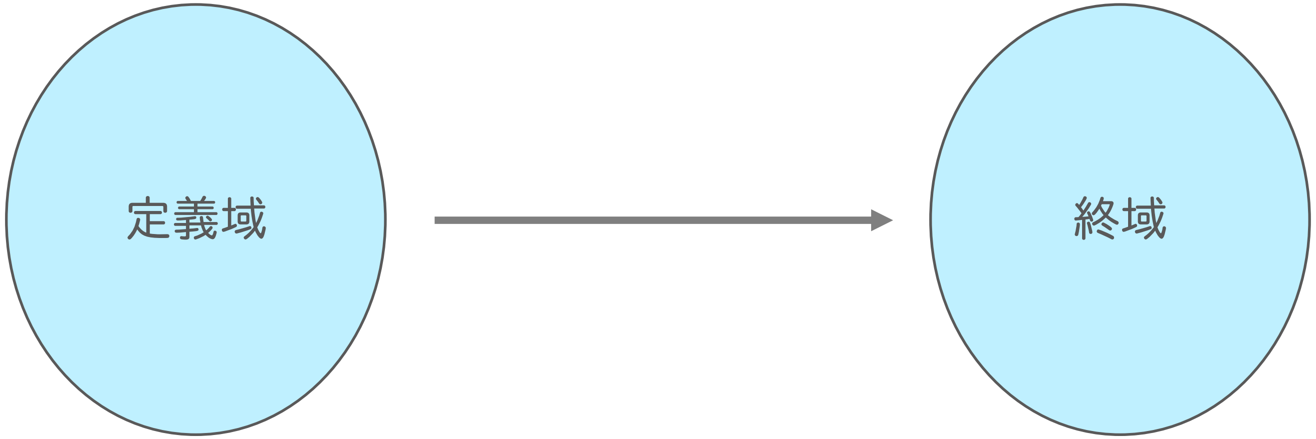
$\mathbb{R}^2$上で直線をなす

- a, b∈Wとするとそれぞれ第1成分と第2成分の値は等しく、その和も同様。
  よってa+b ∈W
- a∈Wのとき、そのスカラー倍の第1成分と第2成分は等しい。$\lambda \in \mathbb{R}$
  とするとλaも同様でλa ∈W



写像

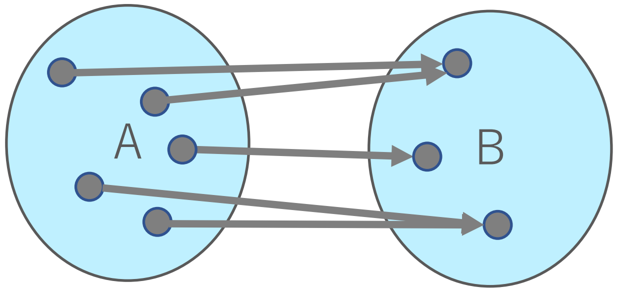
二つの集合が与えられたときに、一方の集合（定義域）の各元に対し、他方の集合（終域）のただひとつの元を指定して結びつける対応のこと



終域のすべての元が定義域の元と対応付けられているわけではない
定義域の元と対応付けられている元からなる集合を像という

全射と単射

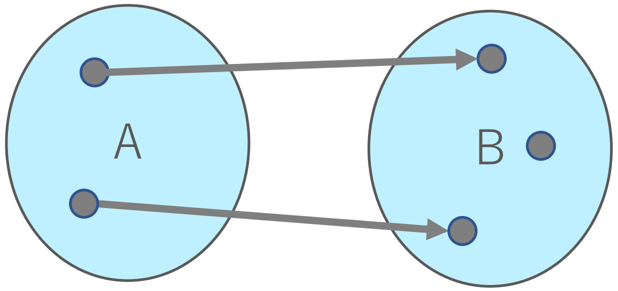
- 全射



終域の全ての元に、対応する定義域の元がある

$\forall y \in B$に対し、$f(x)=y$となる$x \in A$が存在する

- 単射



Aの元とBの元が１：１に対応している

$\forall x, y \in A$に対し、$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

Aと対応付けられないBの元があることもあるが
Bの全ての元がAと対応付けられるときはその写像は
全射かつ単射で、全単射と呼ばれる

K-準同型写像とK-線形写像

- 2つの集合 X, X’　の写像であって、それらの（代数的な）構造を保つものを準同型写像という

- X, X’　がK-線形空間で以下のように線形性(和とスカラー倍)を保つものをK-線形写像という※

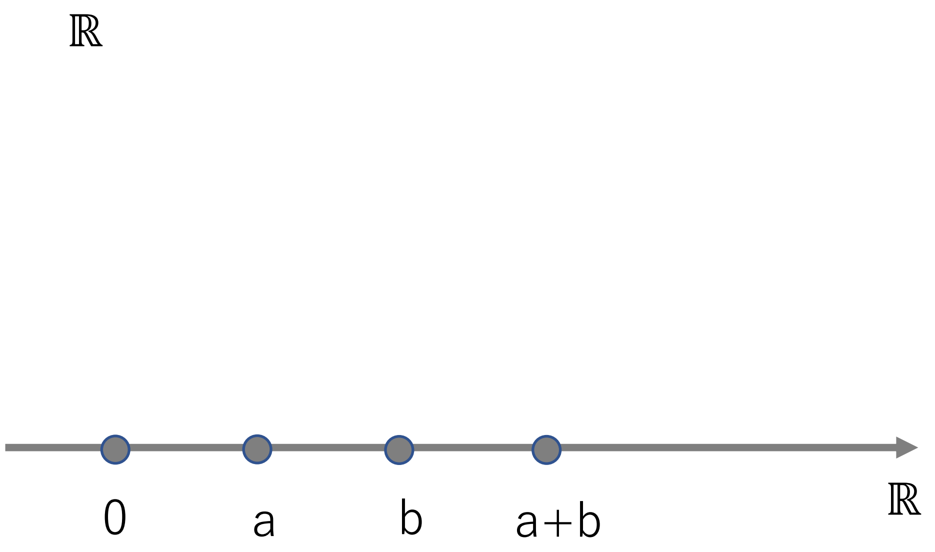
  $a, b \in V, \lambda \in K$として

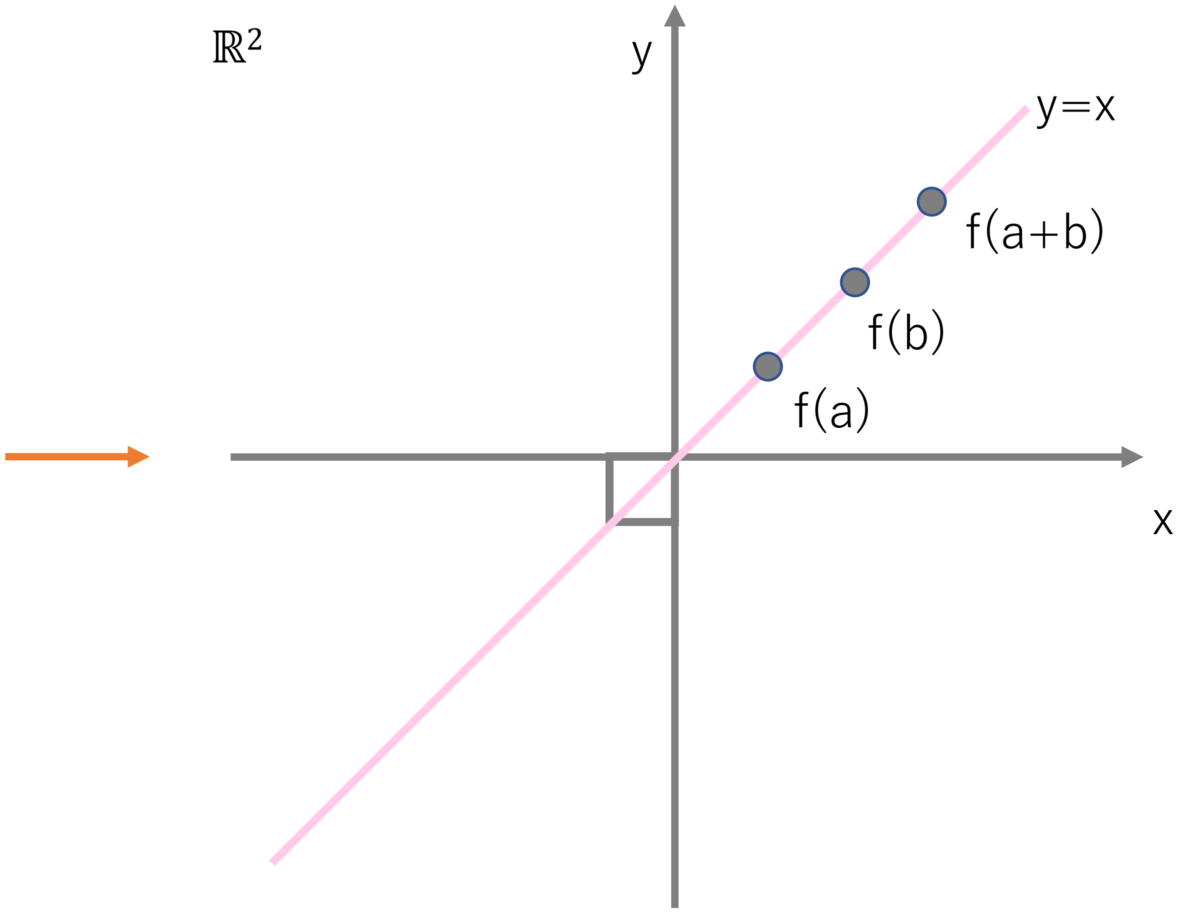
  $$f(a+b) = f(a)+f(b)$$

  $$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

※ 線形空間の間の準同型写像であることが文脈から明らかなときにはK-準同型写像と書いてK-線形写像を表すこともある

K-線形写像の例





$$
\begin{array}{cccc}
f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}
\end{array}
$$

射影空間

- 定義
- 実射影空間
- ~~複素射影空間~~
- ~~射影代数多様体~~
- ~~アフィン空間との関連~~

射影空間の定義と具体例を扱います
他にも色々やりたかったけど
時間が…

射影空間の定義

n+1次元のK-線形空間Vに対してVの1次元線形部分空間全体のなす集合をVに付随するn次元の射影空間と呼ぶ

これを$P_*(V)$と書く

また、$P_*(K^{n+1})$を$P^n{}_K$で表し、標準的なｎ次元射影空間と呼ぶ

これらの次元はn次元になる

射影空間の具体例

- Vとして平面($\mathbb{R}^2$)を考える場合　…………………… 1次元実射影空間
- Vとしてn+1次元数空間($\mathbb{R}^{n+1}$)を考える場合…… n次元実射影空間

- n次元実射影空間の議論でわかったことを1次元実射影空間で確認

平面で考えてみる

$n=1$, Kを$\mathbb{R}$として
2次元の$\mathbb{R}$-線形空間、$\mathbb{R}^2$に付随する1次元の射影空間を考える

1次元線形部分空間は
原点を通る直線

それらの全体が1次元の射影空間になる

直線以外の部分空間は

$\{\mathbf{0}\}\cdots$次元0

$\mathbb{R}^2\cdots$次元2

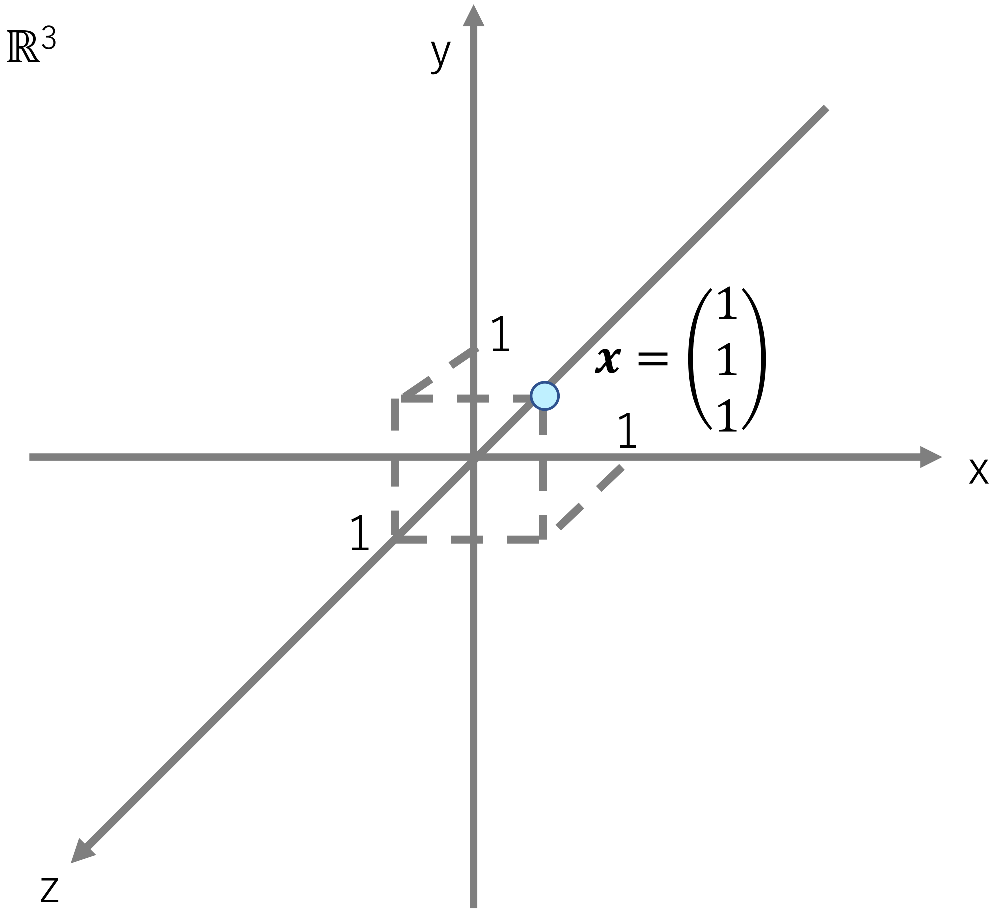
より、射影空間の元にならない

n次元 実射影空間

$\mathbb{R}^{n+1}$の元は$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$,

$(x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n+1)$と書けて

$\mathbb{R}^2$と同様に和とスカラー倍を定義すれば$\mathbb{R}$-線形空間になる



n次元 実射影空間

$\mathbb{R}^{n+1}$の元の中で原点以外の点を取り、その連比※によって点の座標が与えられる集合をn次元実射影空間という。（$P^n{}_{\mathbb{R}}$）

※$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}$ なる$\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$が存在するとき、 $\boldsymbol{x}, \mathbf{y}$ を同じものとみなす

例） $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$は同一視する

すなわち、直線（傾きが等しい点の集まり）全体の集合を考えれば良い

n次元実射影空間つづき

ところで、 $P^n{}_{\mathbb{R}}$の点は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad と \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

の2種類に分けられる

※$x_{n+1} \neq 0$のときは$\lambda = x_{n+1}$として全ての成分をλで割れば第n+1成分が1となる点と同一視できる

例） $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は全ての成分を3で割ると$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$と同一視できる

n次元実射影空間つづき

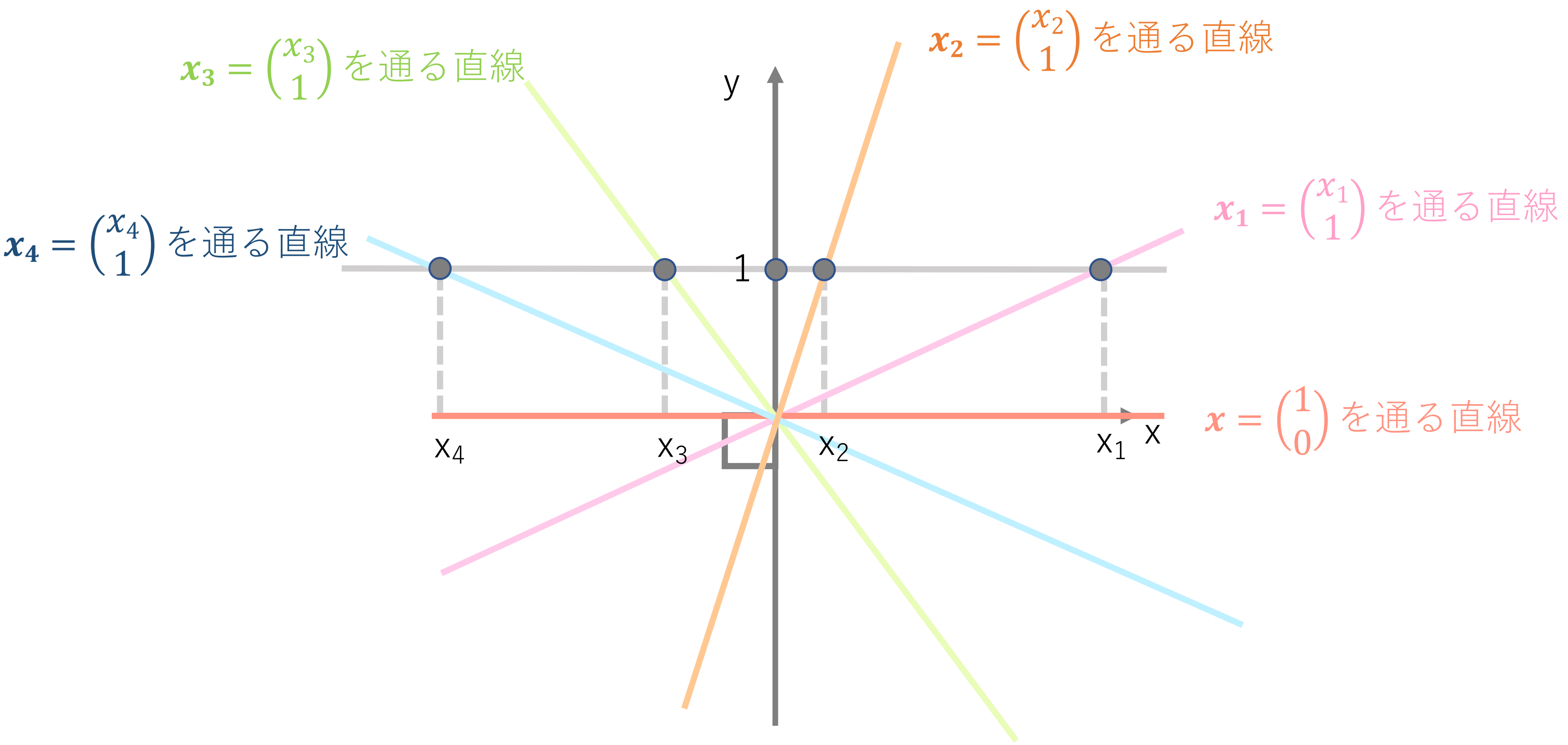
$P^n{}_{\mathbb{R}}$から$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$を除いた集合、すなわち$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$型の点全体の集合と

$\mathbb{R}^n$ は全単射で対応付けられ※(第1～n成分は任意の実数の値を取れる)

$P^n{}_{\mathbb{R}}$は$\mathbb{R}^n$ に$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$型の点の集合（超平面になる）を付け加えたものとも思うことができる

※ここはざっくりした説明になりましたが後日説明追記します

1次元実射影空間の場合



1次元実射影空間は原点を通る直線の全体からなる集合

次回2月27日17時から

- 射影的代数多様体
- 二次曲線の射影
- 射影多様体の有理写像

お申し込みサイト：https://33-prep-2.peatix.com/

参考文献

- 射影空間の幾何学（川又）
- 線型代数学（佐武）
- 複素幾何（小林）
- 微分形式の幾何学（森田）